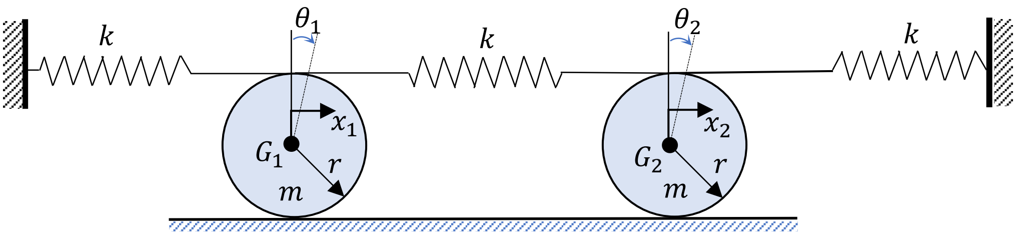
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Ex3 (4 pts)
Pour le système à deux degrés de liberté composé deux cylindres de masse m et de rayon r, qui roule sans glissement $(x_i = r\theta_i)$ sur un plan horizontal. Le système est relié par trois ressorts de constantes de raideur k.



a) Déterminer les équations de mouvement. (2 pts)
b) Ecrire l'équation caractéristique et déterminer les pulsations propres. (2 pts)

Solution :

Energie potentielle

A l'instant t le centre de gravité du premier cylindre se déplace de x_1 en roulant et le centre de gravité du deuxième cylindre se déplace de x_2 en roulant.
Le ressort à gauche s'allonge de $(2x_1)$.
Le ressort à droite s'allonge de $(2x_2)$.
Le ressort du milieu s'allonge de $(2x_2 - 2x_1)$.

$$V = \frac{1}{2}k(2x_1)^2 + \frac{1}{2}k(2x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{2}k(2x_2)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(2r\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(2r\theta_2 - 2r\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(2r\theta_2)^2$$

Energie cinétique

Le 1er cylindre possède une translation x_1 du centre de gravité et une rotation θ_1 $(x_1 = r\theta_1)$.
Le 2ème cylindre possède une translation x_2 du centre de gravité et une rotation θ_2 $(x_2 = r\theta_2)$.
Le moment d'inertie massique d'un cylindre autour d'un axe passant par son centre gravité $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2$$

Comme $\dot{x}_1 = r\dot{\theta}_1$ et $\dot{x}_2 = r\dot{\theta}_2$

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2$$

$$T = \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_2)^2$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \quad i=1,2$$

Première cordonnée généralisée ($q_1=\theta_1$).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}+\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=0$$

$$T=\frac{3}{4}m\left(r\dot{\theta}_1\right)^2+\frac{3}{4}m\left(r\dot{\theta}_2\right)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=0$$

$$V=\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_1)^2+\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_2)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=4kr^2\theta_1-4kr^2(\theta_2-\theta_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1}=8kr^2\theta_1-4kr^2\theta_2$$

Première équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1+8kr^2\theta_1-4kr^2\theta_2=0$$

Deuxième cordonnée généralisée ($q_2=\theta_2$).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_2}+\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=0$$

$$T=\frac{3}{4}m\left(r\dot{\theta}_1\right)^2+\frac{3}{4}m\left(r\dot{\theta}_2\right)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}=\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2}=0$$

$$V=\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_1)^2+\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}k\cdot 4r^2(\theta_2)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=k\cdot 4r^2(\theta_2-\theta_1)+k\cdot 4r^2\theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2}=-k4r^2\theta_1+8kr^2\theta_2$$

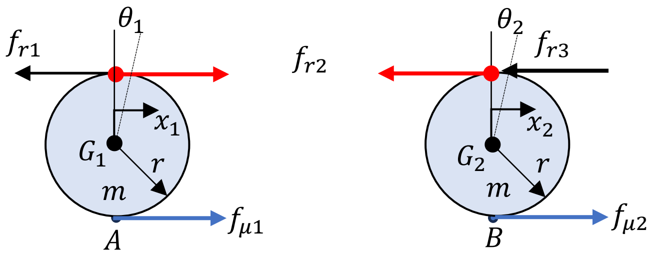
Deuxième équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2-4kr^2\theta_1+8kr^2\theta_2=0$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Seconde loi de Newton



Diagrammes des corps libres

A l'instant t le centre de gravité du premier cylindre se déplace de x_1 en roulant et le centre de gravité du deuxième cylindre se déplace de x_2 en roulant.
Le ressort à gauche s'allonge de $(2x_1)$.
Le ressort à droite s'allonge de $(2x_2)$.
Le ressort du milieu s'allonge de $(2x_2 - 2x_1)$.

Les forces de rappels

$$f_{r1} = k(2x_1) = 2kr\theta_1$$
$$f_{r2} = k(2x_2 - 2x_1) = 2k(r\theta_2 - r\theta_1)$$
$$f_{r3} = k(2x_2) = 2kr\theta_2$$

Pour le premier cylindre : Isoler le cylindre et appliquer la loi de la dynamique

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/A} = I_A\ddot{\theta}_1$$
$$I_A = I_{G_1} + mr^2$$
$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$
$$-f_{r1} \times 2r + f_{r2} \times 2r = I_A\ddot{\theta}_1$$
$$-2kr\theta_1 2r + 2k(r\theta_2 - r\theta_1) \times 2r = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1$$

La première équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1 + 8kr^2\theta_1 - 4kr^2\theta_2 = 0$$

Pour le deuxième cylindre : Isoler le cylindre et appliquer la loi de la dynamique

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/B} = I_B\ddot{\theta}_2$$
$$I_B = I_{G_2} + mr^2$$
$$I_B = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$
$$-f_{r2} \times 2r - f_{r3} \times 2r = I_B\ddot{\theta}_2$$
$$-2k(r\theta_2 - r\theta_1) \times 2r - 2kr\theta_2 2r += \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2$$

La deuxième équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2 -'kr^2\theta_1 + 8kr^2\theta_2 = 0$$

Les équations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 8k & -4k \\ -4k & 8k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres

On suppose que dans un mode propre

$$\begin{matrix} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos\omega t \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos\omega t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\theta}_1(t) = -\omega^2 \Theta_1 \cos\omega t \\ \ddot{\theta}_2(t) = -\omega^2 \Theta_2 \cos\omega t \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -4k \\ -4k & 8k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} 8k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -4k \\ -4k & 8k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique

$$\left(8k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 - 16k^2 = 0$$

$$\left(8k - \frac{3}{2}m\omega^2 - 4k\right)\left(8k - \frac{3}{2}m\omega^2 + 4k\right) = 0$$

$$\left(4k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)\left(12k - \frac{3}{2}m\omega^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

et $\omega_2 = \sqrt{\frac{8k}{m}}$