Corrigé - td1

Exercice n°1 :

	Unité statistique	population	caractère	nature
Étude du temps de validité des lampes électriques.	**Une lampe électrique**	**Les lampes électriques**	**La durée de vie (le temps de validité)**	**Quantitatif continu**
Étude de l'absentéisme des ouvriers, en jours, dans une usine durant l'année 2018	**L'ouvrier**	**Les ouvriers**	**Le nombre de jours d'absence**	**Quantitatif discret** **Mais si le nombre de modalités distinctes est grand, on l'étudiera comme série continue**
Répartition des étudiants de la première année MI selon la mention obtenue sur le diplôme du Bac.	**L'étudiant**	**Les étudiants de la première année MI**	**La mention** obtenue sur le diplôme du Bac.	**Qualitatif ordinal**
On cherche à modéliser le nombre de collisions impliquant deux voitures sur un ensemble de 100 intersections routières choisies au hasard dans une ville. Les données sont collectées sur une période d'un an et le nombre d'accidents pour chaque intersection est ainsi mesuré.	**L'intersection**	**Les 100 intersections**	**Le nombre d'accidents pour chaque intersection**	**Quantitatif discret** **si le nombre de modalités distinctes est grand, on l'étudiera comme série continue**

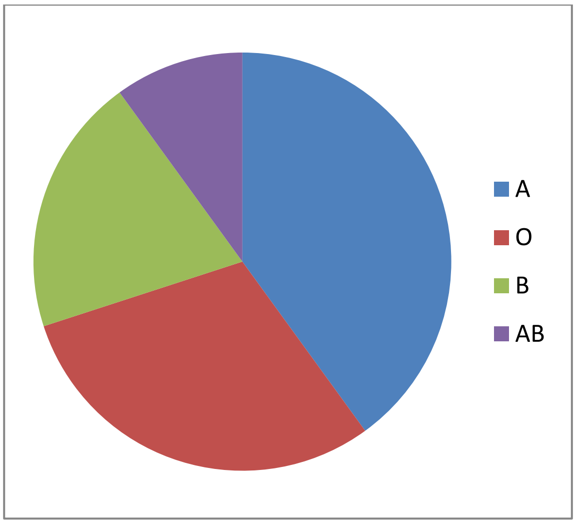
Corrigé - td1

Exercice 2

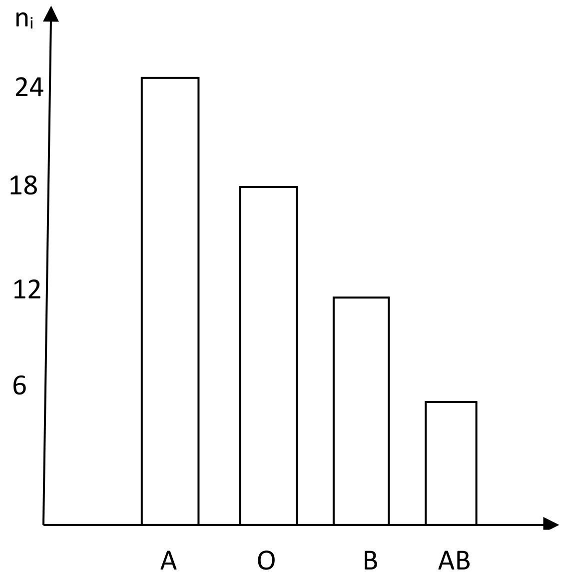
1. La population:**Les étudiants des groupes 1, 2 et 3 de la section1 de la 1ère année MI**
2. Le caractère : **le groupe sanguin**
   La nature du caractère : **qualitatif nominal**
3. Les modalités : Les groupes sanguins A, B, AB et O
4. Tableau statistique de la distribution des personnes selon leur groupe sanguin

modalités	**n_i**	**f_i**	**f_i %**
A	24	0.400	40.0
O	18	0.300	30.0
B	12	0.200	20.0
AB	6	0.100	10.0
	N=60	Σ=1.000	Σ=100.0

5.



Diag.par secteurs de la distribution des des étudiants selon leur groupe sanguin



Diag.en tuyaux d'orgue de la distribution des étudiants selon leur groupe sanguin

l'angle au centre de chaque secteur est défini par $\alpha_i = 360° \times f_i$

Corrigé - td1

Exercice n°3 Un commerçant relève le nombre d'articles figurant dans les cents dernières commandes :

08	**05**	**04**	**06**	**10**	**05**	**06**	**06**	**09**	**07**
12	**06**	**12**	**08**	**04**	**09**	**07**	**04**	**09**	**08**
06	**08**	**12**	**06**	**07**	**11**	**10**	**07**	**09**	**09**
10	**08**	**12**	**04**	**09**	**08**	**07**	**08**	**10**	**08**
05	**04**	**12**	**12**	**05**	**06**	**05**	**09**	**12**	**10**
11	**11**	**05**	**12**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**09**
11	**05**	**07**	**05**	**11**	**11**	**05**	**08**	**07**	**08**
11	**09**	**04**	**09**	**04**	**06**	**07**	**07**	**11**	**09**
12	**11**	**08**	**07**	**04**	**08**	**10**	**12**	**07**	**08**
10	**10**	**06**	**11**	**08**	**09**	**11**	**08**	**11**	**06**

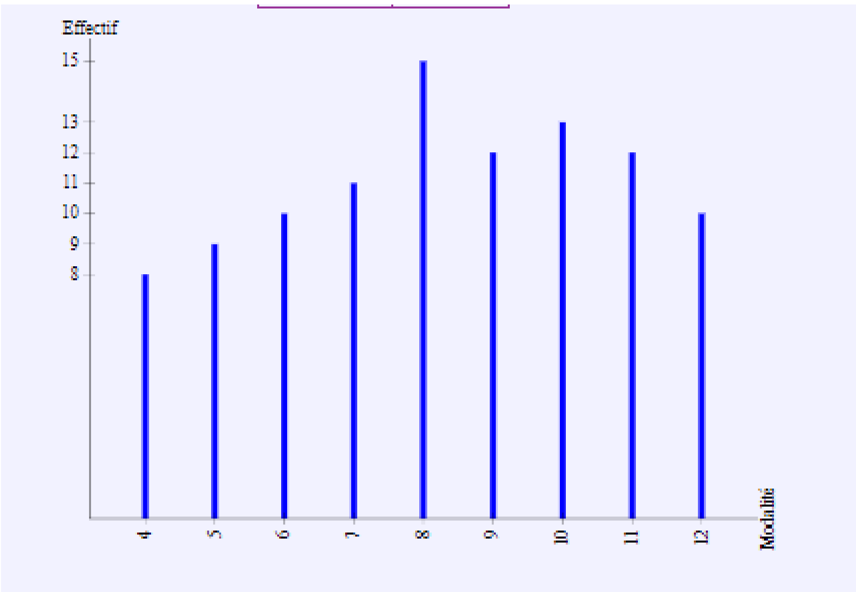
1. Identifier : la population étudiée, le caractère et sa nature.
2. Donner le tableau statistique de cette distribution.
3. Représenter graphiquement le diagramme différentiel. Déterminer le mode graphiquement.
4. Représenter graphiquement la courbe cumulative. Déterminer la médiane graphiquement.
5. Calculer le mode et la médiane de cette série.
6. Quel est le nombre moyen d'articles dans une commande ?
7. Calculer les quartiles Q_1 et Q_3 , le quintile q_2, le décile d_7.
8. Calculer les paramètres de dispersion (la variance, l'écart-type, le coefficient de variation, le coefficient de dissymétrie et l'écart semi-interquartile).

1- La population étudiée : **les cents dernières commandes.**
Le caractère : **le nombre d'articles dans une commande**
La nature du caractère **: quantitatif discret**

2- Le tableau de distribution des effectifs :

x_i	**Effectifs n_i**	**Effectifs cumulés n_{ic}**	**Fréquences relatives cumulées Fi**
4	8	8	0.08
5	9	17	0.17
6	10	27	0.27
7	11	38	0.38
8	15	53	0.53
9	12	65	0.65
10	13	78	0.78
11	12	90	0.9
12	10	100	1
	$N=\sum n_i= 100$		

3- Représentation graphique (le diagramme différentiel)



Distribution des commandes selon le nombre d'articles

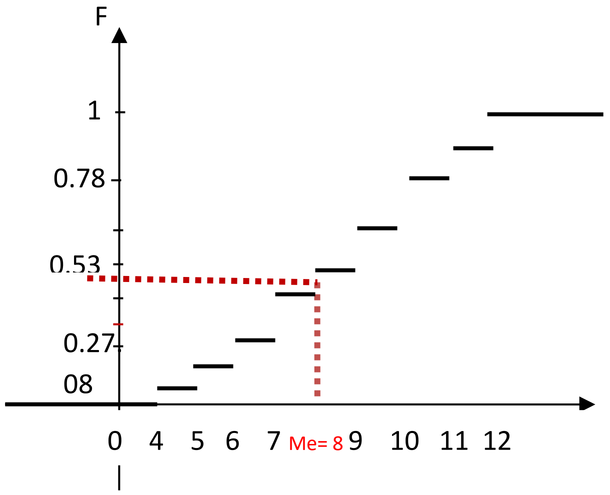
Le mode $M_o = 8$ (la valeur de la vs ayant le plus haut bâton)

1. La courbe cumulative :
   La fonction de répartition
   F : IR $\to$ |0 , 1]
   x $\to$ $F(x) = F_i = f_1 + \ldots + f_i$ si $x_i \leq x < x_{i+1}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 4 \\ \frac{8}{100} & si\ \ 4 \leq x < 5 \\ \frac{17}{100} & si\ \ 5 \leq x < 6 \\ \frac{27}{100} & si\ 6 \leq x < 7 \\ \frac{38}{100} & si\ 7 \leq x < 8 \\ \frac{53}{100} & si\ 8 \leq x < 9 \\ \frac{65}{100} & si\ 9 \leq x < 10 \\ \frac{78}{100} & si\ 10 \leq x < 11 \\ \frac{90}{100} & si\ 11 \leq x < 12 \\ 1 & si\ \ x \geq 12 \end{cases}$$

Corrigé - td1

La représentation graphique de la fonction F (en escalier) est la courbe cumulative (diagramme intégral) des commandes selon le nombre d'articles



La médiane Me = 8

5. Le mode Mo = 8

   La médiane : la v.s. est discrète et N=100 est pair alors Me = $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}}+x_{\frac{N}{2}+1}\right)= =$

   $\frac{1}{2}(x_{50}+x_{51})=\frac{1}{2}(8+8)=8$

6. On calcule la moyenne

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum n_i x_i$$

x_i	n_i	$n_i x_i$
4	8	32
5	9	45
6	10	60
7	11	77
8	15	120
9	12	108
10	13	130
11	12	132
12	10	120
	N=100	**∑=824**

$$\overline{X}=\frac{824}{100}=8{,}24$$

7. Le quartile $Q_1 = c_{25}$

On a α=25 et Nα/100=100×25/100=25 ∈ IN donc $Q_1 = c_{25}=\frac{1}{2}\left(x_{\frac{N\alpha}{100}}+x_{\frac{N\alpha}{100}+1}\right)=$

$$=\frac{1}{2}(x_{25}+x_{26})=\frac{1}{2}(6+6)=6$$

Le quartile $Q_3 = c_{75}$

α=75 , Nα/100=100×75/100=75 ∈ IN donc $Q_1 = c_{75}=\frac{1}{2}\left(x_{\frac{N\alpha}{100}}+x_{\frac{N\alpha}{100}+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}(x_{75}+x_{76})=\frac{1}{2}(10+10)=10$$

De la même manière : $q_2 = c_{40} = 8$ et $d_7 = c_{70} = 10$

8. la variance V(X)

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
4	8	32	128
5	9	45	225
6	10	60	360
7	11	77	539
8	15	120	960
9	12	108	972
10	13	130	1300
11	12	132	1452
12	10	120	1440
	N=100	**∑=824**	**∑=7376**

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{7376}{100} - 8{,}24^2 = 5.862$$

L'écart-type $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 2.421$

Le coef de variation cv= $\frac{\sigma_X}{\overline{X}}$=0.29=29% >15% donc la série est dispersée

Le coef de dissymétrie CD=$\frac{3(\overline{X}-M_e)}{\sigma_X} > 0$ la distribution est étalée vers la droite

L écart semi interquartile = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$=2

Corrigé - td1

Exercice 4

Budget	n_i	e_i	n_{ic}	h_i	x_i	y_i	$n_i\ y_i$	$n_i\ y_i^2$
[0 , 100 000[	200	10^5	200	200	5.10^4	0	0	0
[100 000 , 300 000[	200	2.10^5	400	100	20.10^4	1,5	300	450
[300 000 , 500 000[	200	2.10^5	600	100	40.10^4	3,5	700	2450
[500 000 , 700 000[	150	2.10^5	750	75	60.10^4	5,5	825	4537,5
[700 000 , 1 000 000[	250	3.10^5	1000	83.3	85.10^4	8	2000	16000

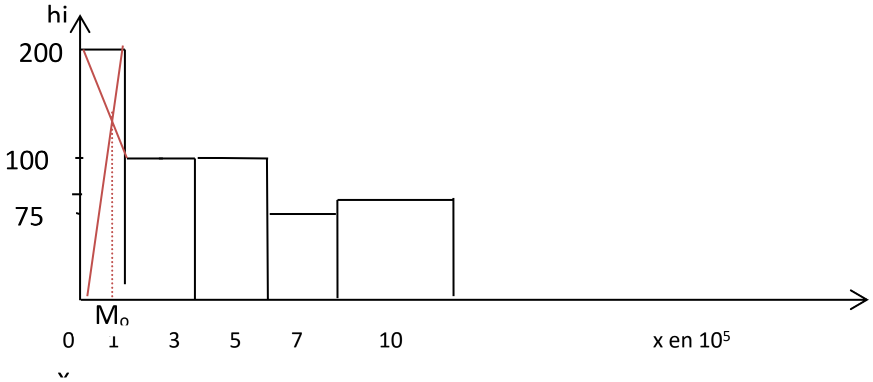
$N=\Sigma n_i=1000$ $\Sigma=3825$ $\Sigma= 23437,5$

1. la population : les ménages

le caractère : le budget consacré aux vacances d'été d'un ménage

la nature du caractère : quantitatif continu

2. Tracer le diagramme différentiel et déterminer le mode graphiquement.



Diag. différentiel des ménages selon le budget consacré au vacances

3. **le mode**

Classe modale [0 , 100 000[

Mo= $a_i + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} e_i = 0 + \dfrac{200}{200+(200-100)}\ 100\,000 = 66\ 667\ \text{DA}$

la médiane

Classe médiane [300 000 , 500 000[(la première classe ayant un effectif cumulé strictement supérieur à N/2 est la troisième classe donc i=3)

Me= $a_i + \dfrac{N/2\ -\ n_{(i\text{-}1)c}}{n_i} e_i = 300\,000 + \dfrac{500 - 400}{200}\ 200\,000 = 400\ 000\ \text{DA}$

- Le quartile $Q_1 = c_{25}$, $Q_1 \in$[100 000 , 300 000[

$Q_1 = a_i + \dfrac{N\alpha/100\ -\ n_{(i\text{-}1)c}}{n_i} e_i = 100\,000 + \dfrac{10\alpha - 200}{200}\ 200\,000 = 150\ 000\ \text{DA}$

- le quartile $Q_3 = c_{75}$, $Q_3 \in$[700 000 , 1 000 000[

$Q_3 = a_i + \dfrac{N\alpha/100\ -\ n_{(i\text{-}1)c}}{n_i} e_i = 700\,000 + \dfrac{750 - 750}{250}\ 300\,000 = 700\ 000\ \text{DA}$

4. la moyenne, l'écart-type

Par calcul direct $\overline{X} = \dfrac{\sum n_i x_i}{N} = \dfrac{43{,}25.10^7}{1000} = 432500 DA$

Budget	n_i	x_i	$n_i\,x_i$	$n_i\,x_i^2$
[0 , 100 000[	200	5.10^4	10^7	
[100 000 , 300 000[	200	20.10^4	$4.\ 10^7$	
[300 000 , 500 000[	200	40.10^4	8.10^7	
[500 000 , 700 000[	150	60.10^4	$9.\ 10^7$	
[700 000 , 1000 000[	250	85.10^4	$21{,}25.\ 10^7$	

$\Sigma = 43{,}25.10^7$

En utilisant le changement de variable Y= $\dfrac{X - 50\,000}{100\,000}$, Calculer de la moyenne

$\overline{Y} = \dfrac{\sum n_i y_i}{N}$ =3825/1000 =3.825

$\overline{X} = 100\,000.\overline{Y} + 50\,000$ = 432 500 DA

V(Y) = $\dfrac{1}{N}\sum n_i {y_i}^2 - \overline{Y}^2$ = 8.807

V(X) = a^2 V(Y) = 88,07 .10^9 DA^2

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ = 296 766 DA

L'écart interquartile = Q_3 - Q_1 =700 000 – 150 000 = 550 000 DA

5. Les rangs centiles des valeurs 250 000 DA et 800 000 DA

rg(250 000) = $\alpha \Leftrightarrow C_\alpha$ = 250 000

250 000 $\in$[100 000 , 300 000[

250 000 = 100 000 + $\dfrac{N\alpha/100\ -\ 200}{200}\,200\,000$ d'où rg(250 000) = α = 35

rg(800 000) = $\alpha \Leftrightarrow C_\alpha$ = 800 000

800 000 $\in$[700 000 , 1 000 000[

8000 = 700 000 + $\dfrac{N\alpha/100\ -\ 750}{250}\,300\,000$ d'où rg(800 000) = α = 79

La proportion des ménages qui consacrent entre 250 000 DA et 800 000 DA pour leur vacances d'été.

P(250 000 < X < 800 000)= rg(800 000)-rg(250 000)] = 44 %

Corrigé - td1

Exercice 5

1. Au mois de janvier de 2018, les prix ont augmenté de 0,9 %, puis en février de 1,2 %. Déterminer l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois. Quelle moyenne utilise-t-on ?

Soit P un prix, en janvier, au 1^{er} février, le prix est devenu P'= P+P×0.9/100=1.009×P

Au 1^{er} mars le prix est devenu P''= P'+P'×1.2/100= 1.012×P' donc P''= 1.009 × 1.012 ×P

Soit t le taux mensuel moyen d'augmentation sur les deux mois janvier et février.

On doit avoir $P' = P \times (1+\frac{t}{100})$ et $P'' = P' \times (1+\frac{t}{100})$ donc $P'' = P \times (1+\frac{t}{100})^2$

t vérifie alors $(1+\frac{t}{100})^2 = 1.009 \times 1.012$

donc $1+\frac{t}{100}$ est <u>la moyenne géométrique</u> de 1.009 et 1.012

$1+\frac{t}{100} = \sqrt{1.009 \times 1.012} \approx 1.010498$

Et donc t =(1.010498 -1)100≈ 1.0499 %

2. Un automobiliste roule pendant une heure à la vitesse constante de 90 km/h, puis pendant encore une heure à la vitesse constante de 120 km/h. Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler pendant la durée totale du trajet pour effectuer le même nombre de kilomètres. Quelle moyenne utilise-t-on ?

On utilise la formule V= d/t ou d= V.t

La $1^{ère}$ partie du voyage dure $t_1 = 1$ heure à la vitesse $V_1 = 90$km/h donc l'automobiliste roule pendant la première étape la distance $d_1 = V_1\, t_1 = 90\times1 = 90$ km

De même, en deuxième partie du voyage, il roule pendant $t_2 = 1$ heure à la vitesse $V_2 = 120$ km/h donc l'automobiliste parcourt la distance $d_2 = V_2\, t_2 = 120\times1 = 120$ km.

La vitesse moyenne V vérifie l'équation d= V × t ; la distance d = 90+120 km et le temps

t = 1h+1 h = 2h

Donc $V = \frac{90+120}{2} = 105\ km/h$ il s'agit de <u>la moyenne arithmétique</u> de 90 et 120

Corrigé - td1

3. Un automobiliste roule 100 km à la vitesse constante de 90 km/h, puis encore 100 km à la vitesse constante de 120 km/h. Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler sur la distance totale pour que la durée du voyage soit identique. Quelle moyenne utilise-t-on ?

On utilise aussi la formule $d = V.t$

La 1ère partie du voyage est de d_1=100 km à la vitesse V_1 = 90 km/h donc la durée est de

$t_1 = d_1/V_1 = 100/90$ heures.

Pour la seconde partie du voyage, il roule la distance de d_2 = 100 km à la vitesse de V_2 = 120 km/h donc la durée est de t_2 = 100/120 heure.

La vitesse moyenne V vérifie l'équation $d = V.t$; or $d = d_1 + d_2$ et $t = t_1 + t_2$

$$100+100= V.(\frac{90}{100} + \frac{120}{100})$$

Donc $V = \frac{100+100}{\frac{90}{100}+\frac{120}{100}}$ c'est <u>la moyenne harmonique</u> de 90 et 120.