Exercice 1:

Soit E et F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \quad et \quad x + y - z = 0\right\}$$

$$F = Vect\left(v_1\left(1,1,1\right), v_2\left(-2,1,0\right), v_3\left(-1,2,1\right)\right)$$

1. Donner une base de E. En déduire la dimension de E.
2. Déterminer la dimension de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? justifier votre réponse.

Solution:

Soit E et F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \quad et \quad x + y - z = 0\right\}$$

$$F = Vect\left(v_1\left(1,1,1\right), v_2\left(-2,1,0\right), v_3\left(-1,2,1\right)\right)$$

1. Donner une base de E. En déduire la dimension de E.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$X = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow x - y = 0 \quad et \quad x + y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$$

Donc,

$$X = (y, y, 2y) = y\underbrace{(1,1,2)}_{u_1}.$$

Alors,

$$E = vect\left(u_1\right).$$

Donc $B = \{u_1\}$ est une famille génératrice de E. Puisque $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $B = \{u_1\}$ est aussi une famille libre et donc B est une base de E.

$$\dim E = card\left(B\right) = 1.$$

2. Déterminer la dimension de F.

On remarque que

$$v_1 + v_2 = v_3,$$

donc, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée. On choisit la sous-famille suivante

$$B^{'} = \left\{v_1\left(1,1,1\right), v_2\left(-2,1,0\right)\right\}$$

On a:
(i). $B^{'}$ est génératrice de F.

$$Vect\left(v_1, v_2, v_3\right) = Vect\left(v_1, v_2, v_1 + v_2\right) = Vect\left(v_1, v_2\right)$$

(ii). $B^{'}$ est une famille libre, car pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha v + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Alors, $B^{'}$ est une base de F. Donc

$$\dim F = card\left(B^{'}\right) = 2.$$

3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
On a:
(i).

$$\dim E + \dim F = \dim \mathbb{R}^3.$$

(ii). La famille $B^{''} = \{u_1\left(1, 1, 2\right), v_1\left(1, 1, 1\right), v_2\left(-2, 1, 0\right)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
En effet,
On a

$$card\left(B^{''}\right) = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc, il suffit de savoir s'elle est libre ou génératrice.
Résolvons l'équation vectorielle suivante

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

avec α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$.
On trouve le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 & \text{..... (1)} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & \text{..... (2)} \\ 2\alpha + \beta = 0 & \text{..... (3)} \end{cases}$$

Eq(2) - Eq(1) donne $\gamma = 0$. On remplace γ dans l'équation (2), on obtient

$$\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta.$$

Donc, l'équation (3) équivalente à

$$-2\beta + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0.$$

D'où

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On conclut que $B^{''}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$E \oplus F = \mathbb{R}^3.$$