Exercice 2:

Soient E, F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\right\}$$

$$F = vect\,(v_1(1, 0, 1), v_2(1, 1, 0), v_3(3, 2, 1))$$

1. Donner une base de E et une base de F.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Solution:

Soient E, F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\right\}, \qquad F = vect\,(v_1(1, 0, 1), v_2(1, 1, 0), v_3(3, 2, 1))$$

1. Donner une base de E

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$X = (x, y) \in E \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Donc,

$$X = (x, -x, z) = x\underbrace{(1, -1, 0)}_{u_1} + x\underbrace{(0, 0, 1)}_{u_2}.$$

Alors,

$$E = vect\,(u_1, u_2)\,.$$

Donc $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de E. Puisque u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc $\{u_1, u_2\}$ est aussi une famille libre et donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de E.

2. Donner une base de F

La famille $\{v_1(1, 0, 1), v_2(1, 1, 0), v_3(3, 2, 1)\}$ est liée, car $v_1 + 2v_2(1, 1, 0) = v_3$. On choisit la famille $B = \{v_1(1, 0, 1), v_2(1, 1, 0)\}$.

D'où B est une famille génératrice de F. Puisque v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, alors la famille B est libre et donc B est une base de F.

3. Déterminer $E \cap F$.

Résolvons l'équation $X_E = X_F$.

On a: $X_E = (x, y, z) \in E$ si et seulement si $x + y = 0$ et $X_F = (x, y, z) \in F$ si et seulement si $X_F = (x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

On obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x = \alpha + \beta + 3\gamma \\ y = \beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\alpha + \beta + 3\gamma) + (\beta + 2\gamma) = 0 \\ x = \alpha + \beta + 3\gamma \\ y = \beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -2\beta - 5\gamma \\ x = -2\beta - 5\gamma + \beta + 3\gamma = -\beta - 2\gamma \\ y = \beta + 2\gamma \\ z = -2\beta - 5\gamma + \gamma = -2\beta - 4\gamma \end{array}\right.$$

donc,

$$X_E = X_F = (-\beta - 2\gamma, \beta + 2\gamma, -2\beta - 4\gamma) = (-\beta - 2\gamma)(1, -1, 2)$$

Alors, $E \cap F$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $w = (1, -1, 2)$.
4. **A-t-on** $E \oplus F = \mathbb{R}^3$**?**
On a:

$$E \cap F \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\},$$

alors, E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Ou

$$\dim E + \dim F = 2 + 2 = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3,$$

ce qui montre que E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.