Exercice 1

Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si

a) chaque lettre est utilisée, au plus, une seule fois,

b) on peut réutiliser les lettres.

a) En utilisant le principe fondamental de dénombrement, on trouve : $A_{26}^{10} = \frac{26!}{(26-10)!}$

b) $\mathcal{A}_{26}^{10}=26^{10}$

Exercice 2 Combien de nombres de 6 chiffres existe-t-il si :

1. il n'y a aucune restriction ?
2. les nombres doivent être divisibles par 5 ?
3. les répétitions de chiffres sont exclues ?

   1. $9\times\mathcal{A}_{10}^{5} = 9\times10^5$ (le 1er chiffre est différent de zéro)
   2. $9\times10^4\times2$ (le 1er chiffre est différent de zéro et le dernier est soit 5 soit 0)
   3. $9\times A_9^5=9\times\frac{9!}{4!}$

Exercice 3

Ahmed va disposer 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de mathématiques, trois de chimie, deux d'histoire et un de langue. Ahmed aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Il y a 4! Permutations possibles entre les spécialités. Pour chaque ordre de présentation des spécialités, les 4 livres de Maths peuvent être permutés entre eux de 4! manières, les 3 livres de chimie de 3! manières et les 2 livres d'histoire de 2! manières.

Donc en tout il y a $4! \times (4! \times 3! \times 2!)$

Exercice 4

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

a) ils peuvent se placer librement ?

b) Les hommes désirent rester groupés ?

a) 25!

b) 10 ! ×16!

Exercice 5

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ? Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger ensemble au comité ?

$C_5^2C_7^3$

$C_5^2C_5^2 + C_5^2C_5^2 + C_5^3C_5^2$

Exercice 6

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen;

a) de combien de manières peut-il les choisir?

b) même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions?

c) $C_{10}^7 = 120$

d) $C_5^3C_5^4+C_5^4C_5^3+C_5^5C_5^2 = 110$

Exercice 7

On forme des nombres avec 5 des chiffres de 1 à 9. Combien de nombres peut-on former si :

1. Aucune condition n'est imposée.
2. Un chiffre apparait plus de deux fois. En déduire le nombre de ceux dont un chiffre apparait moins de trois fois.

1. $N_1 = 9^5 = 59049$

2. $N_2 = C_5^3.9.8^2 + C_5^4.9.8 + 9 = 6129 \Rightarrow N_3 = 59049 - 6129 = 52920$

Exercice 8

Soient E, F et G trois événements.
Trouver des expressions pour les événements suivants qui sont réalisés lorsque de E, F et G :

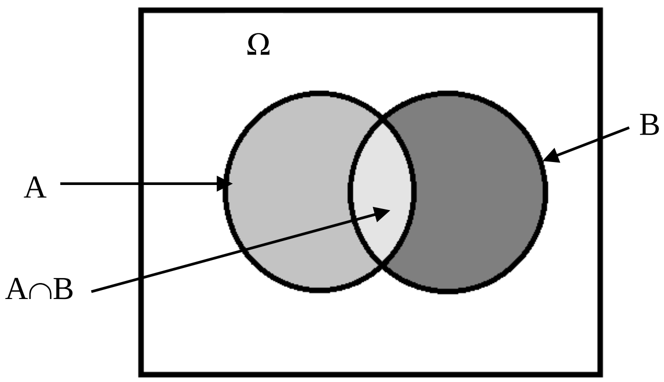
1. E seul l'est,
2. E et G le sont mais pas F,
3. au moins l'un des trois l'est,
4. au moins deux d'entre eux le sont,
5. les trois le sont,
6. aucun ne l'est.

1. $\boldsymbol{E} \cap \overline{\boldsymbol{F}} \cap \overline{\boldsymbol{G}}$
2. $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{G} \cap \overline{\boldsymbol{F}}$
3. $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$
4. $(\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}) \cup (\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{G}) \cup (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G})$
5. $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$
6. $\overline{\boldsymbol{E}} \cap \overline{\boldsymbol{F}} \cap \overline{\boldsymbol{G}} = \overline{\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}}$

Exercice 9

Soient Ω l'ensemble fondamental d'une épreuve aléatoire, P une probabilité sur Ω et A, B et C trois événements quelconques. Démontrer que :

1. $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$
2. $P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C)$



$\mathrm{A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})}$ et donc $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})}$ (1)

$\mathrm{B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})}$ alors $\mathrm{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$ (2)

Donc $\mathrm{P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(B \cap A)}$ (3)

En substituant (3) dans (1) on obtient le résultat.

On pose

$\mathrm{P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(E \cup C)}$ où $\mathrm{E = A \cup B}$

$\mathrm{= P(E) + P(C) - P(E \cap C)}$

$\mathrm{= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)}$

$\mathrm{= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right)}$

$\mathrm{= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap} B \mathrm{\cap C)]}$

Exercice 10

On jette deux dés bien équilibrés. Quel est l'ensemble fondamental pour cette expérience aléatoire?
On note par F l'évènement : « au moins l'un des dés montre 1 » et par G : « la somme des nombres montrés par les dés est 5 ».

1. Déterminer les évènements F, G et calculer leurs probabilités.
2. Déterminer les évènements F∪G , F∩G et calculer leurs probabilités.

L'ensemble fondamental pour cette expérience :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$
$$\Omega = \{(i, j); 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 6\}$$

Le cardinal de l'ensemble Ω : card(Ω)=6^2=36

Description de l'évènement	Événement	Probabilité
F l'évènement : « au moins l'un des dés montre1 »	$F = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$	$P(F) = \frac{card(F)}{card(\Omega)} = \frac{11}{36}$
G : « la somme des nombres montrés par les dés est 5 ».	$G = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	$P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$F \cup G$: **« La somme des nombres montrés par les dés est 5** ou **au moins l'un des dés montre1»,**	$F \cup G =$ $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(2,3),(3,2)\}$	$P(F \cup G) = \frac{card(F \cup G)}{card(\Omega)}$ $= \frac{13}{36}$
$F \cap G$:**« La somme des nombres montrés par les dés est 5** et **au moins l'un des dés montre1»,**	$F \cap G = \{(1,4),(4,1)\}$	$P(F \cap G) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

On a bien $P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$

Exercice 11

On sélectionne un échantillon ordonné de taille 3 d'un ensemble de 26 jetons sur lesquels figurent les lettres de l'alphabet. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : "ce sont 3 consonnes" ;
2. B : "ce sont 3 voyelles" ;
3. C : "c'est le mot MOI" ;
4. D : "c'est une anagramme du mot MOI".

L'échantillon étant ordonné, le nombre de cas possibles est le nombre d'arrangements sans répétition

$$A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24$$

1. $P(A) = \frac{le\ nombres\ de\ cas\ favorables}{le\ nombres\ de\ cas\ possibles} = \frac{A_{20}^3}{A_{26}^3}$

2. $P(B) = \frac{A_6^3}{A_{26}^3}$

3. $P(C) = \frac{1}{A_{26}^3}$

4. $P(D) = \frac{3!}{A_{26}^3}$

Exercice 12

On lance trois Dés. Quelle est la probabilité que deux au moins des trois faces qui apparaissent soient identiques

L'ensemble fondamental

$$\Omega = \{(i, j, k)/1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6, 1 \le k \le 6\}$$

Le cardinal de l'ensemble Ω : card(Ω)=$\mathscr{A}_6^3$ = 6^3= 216

Soit l'évènement B : «deux au moins des trois faces qui apparaissent sont identiques »

$\overline{B}$: « les trois faces sont différentes »

$P(\overline{B}) = \frac{card(\overline{B})}{card(\Omega)} = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{6\times5\times4}{216} = \frac{120}{216}$

P(B)= 1- $P(\overline{B}) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{96}{216}$

Exercice 13

a) 2 événements A et B, incompatibles et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

On a $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ donc $P(A) \times P(B) \neq 0$

$A\cap B = \varnothing$ (A et B incompatibles) donc $P(A\cap B) = 0$

D'où $P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$

b) Démontrer que si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants

A et B indépendants i.e $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

$A=(A\cap B)\cup (A\cap \overline{B})$ alors $P(A) = P((A\cap B)\cup (A\cap \overline{B})) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$

car $(A\cap B) \cap (A\cap \overline{B})=\varnothing$

donc $P(A\cap \overline{B})= P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)[1- P(B)] = P(A)\times P(\overline{B})$

c) Montrer que si deux événements A et B sont indépendants alors leurs contraires $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

On a $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1- P(A \cup B)$

$= 1- [P(A)+P(B) – P(A\cap B)]$

$= 1- P(A) -P(B) + P(A) \times P(B)$

$= P(\overline{A})- P(B)[1- P(A)]= P(\overline{A})- P(B) P(\overline{A}) = P(\overline{A})[1- P(B)]= P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

d) Soient deux événements A et B telles que $P(A)=1/5$ et $P(A\cup B)=1/2$

- Si A et B sont incompatibles, calculer P(B)

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ donc $P(B)= P(A \cup B)-P(A) = 1/2 - 1/5$

- Si A et B sont indépendants, calculer P(B)

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)- P(A\cap B)= P(A) +P(B) - P(A) \times P(B)= P(A) +P(B)[1- P(A)]$

Donc $P(B)= \frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-\ P(A)} = \frac{1/2\ -\ 1/5}{1-1/5} = 3/8$

Exercice 14

30 % des étudiants de la 1ère année ont échoué au cours de Probabilités, 20 % ont échoué au cours d'Analyse et 10 % ont échoué aux deux cours.
On rencontre un étudiant au hasard. Calculer :

1. la probabilité que cet étudiant ait réussi le cours de Probabilités et échoué au cours d'Analyse.
2. la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a échoué au cours de Probabilités.
3. la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a réussi au cours de Probabilités.

Soit les événements suivants :
A : « l'étudiant a échoué au cours d'analyse »
B : « l'étudiant a échoué au cours de probabilités »
On a : $P(A)=0,2$; $P(B)=0,3$ et $P(A\cap B)=0,1$

1. On cherche $P(A\cap \overline{B})$

$A=(A\cap B)\cup (A\cap \overline{B})$ alors $P(A) = P((A\cap B)\cup (A\cap \overline{B})) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$

car $(A\cap B) \cap (A\cap \overline{B})=\varnothing$

Et donc $P(A\cap \overline{B})= P(A) - P(A\cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

2. On cherche $P(A/B)$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$

3. On cherche $P(A/\overline{B})$

$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,1}{1-0,3} = \frac{1}{7}$

Exercice 15

1 Un joueur a dans sa poche deux pièces, l'une est normale et l'autre a pile des deux côtés. Il en prend une au hasard et il la lance, elle montre pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale.

2 Il jette la même pièce une seconde fois, elle montre de nouveau pile. Que devient la probabilité précédente ?

1. Soient les évènements suivants :
A_1 : « il lance la pièce normale »
A_2 : « il lance la pièce ayant 2 côtés piles »
On a $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$

soit l'évènement B : « la pièce montre pile »
On a : $P(B/A_1)=1/2$ et $P(B/A_2)=1$

On cherche $P(A_1/B)$

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

2. soit l'évènement C : « la pièce montre encore pile pour la deuxième fois»

$P(C/A_1)=1/4$
$P(C/A_2)=1$

On cherche $P(A_1/C)$

$$P(A_1/C) = \frac{P(C/A_1)P(A_1)}{P(C/A_1)P(A_1)+P(C/A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

Exercice 16

Une employée a demandé à son chef un certificat de travail en vue d'un nouvel emploi. Elle estime à 80% sa chance d'obtenir ce travail si le certificat est très bon, à 40% s'il est bon et à 10% s'il est moyen. En plus, elle estime la probabilité à 0,7 d'obtenir un très bon certificat, à 0,2 un bon et à 0,1 un moyen.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le nouvel emploi ?
2. Sachant qu'elle obtient l'emploi, quelle est la probabilité qu'elle ait un très bon certificat ?
3. Même question qu'en b) sachant qu'elle ne l'obtient pas ?

Soient les événements suivants :
A_1 : « l'employée obtient de son chef un très bon certificat »
A_2 : « l'employée obtient de son chef un bon certificat »
A_3 : « l'employée obtient de son chef un certificat moyen »
B : « l'employée obtient le nouvel emploi »

1. On cherche P(B)

$$P(B) = P(B/A_1)\times P(A_1) + P(B/A_2)\times P(A_2) + P(B/A_3)\times P(A_3)$$

On a : $P(A_1)= 0.7$, $P(A_2)=0.2$, $P(A_3)=0.1$
$P(B/A_1)=0.8$; $P(B/A_2)=0.4$, $P(B/A_3)=0.1$

$$P(B) = P(B/A_1)\times P(A_1) + P(B/A_2)\times P(A_2) + P(B/A_3)\times P(A_3) = 0.8\times0.7 + 0.4\times0.2 + 0.1\times0.1=0.65$$

2. $P(A_1/B)= \dfrac{P(B/A_1)\times P(A_1)}{P(B)}$

$P(A_1/B)= \dfrac{0.8\times 0.7}{0.65} = 0.86$

3. $P(A_1/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A_1)}{P(\overline{B})}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$

Et

$A_1 = (B \cap A_1) \cup (\overline{B} \cap A_1)$ donc $P(A_1) = P(B \cap A_1) + P(\overline{B} \cap A_1)$

$P(\overline{B} \cap A_1) = P(A_1) - P(B \cap A_1) = P(A_1) - P(B/A_1).P(A_1) = 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.14$

$P(A_1/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap A_1)}{P(\overline{B})} = \frac{0.14}{1 - 0.65} = 0.4$