Corrigé de fiche TD 1 (ALG II)

2023 - 2024

Exercice 1 (*Espace Vectoriel*)

1. Montrer que les ensembles suivants possèdent une structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{k}$ donné (pour les lois usuelles) $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$).
On applique la définition d'un espace vectoriel.

On appelle ***espace vectoriel*** *sur $\mathbb{k}$ (ou $\mathbb{k}$-espace vectoriel), tout ensemble non vide E muni de deux lois:*

- une loi de composition interne (notée $+$)

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

- une loi de composition externe (notée $\bullet$)

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{k} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \bullet u \end{aligned}$$

qui vérifient les propriétés suivantes:

1. $u + v = v + u$ *(pour tous $u, v \in E$)*
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(pour tous $u, v, w \in E$)*
3. *Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)*
4. *Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$*
5. $1 \bullet u = u$ *(pour tout $u \in E$)*
6. $\alpha \bullet (\beta \bullet u) = (\alpha\beta) \bullet u$ *(pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $u \in E$)*
7. $(\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$ *(pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $u \in E$)*
8. $\alpha \bullet (u + v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$ *(pour tous $u, v \in E$, $\alpha \in \mathbb{k}$)*

L'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles:
$(x, y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right)$ et $\lambda \bullet \left(x^{'}, y^{'}\right) = (\lambda x, \lambda y)$
Soient $u = (x, y)\,, v = \left(x^{'}, y^{'}\right), w = \left(x^{''}, y^{''}\right) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a:

$$u + v = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \lambda \bullet u = (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$$

Donc $+$ est une loi de composition interne et $\bullet$ est une loi de composition externe.

1.

$$\begin{aligned} u + v = (x, y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) &= \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \\ &= \left(x^{'} + x, y^{'} + y\right) = \left(x^{'}, y^{'}\right) + (x, y) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

2.

$$(u+v)+w=\left(x+x^{'},y+y^{'}\right)+\left(x^{''},y^{''}\right)$$

$$=\left(x+x^{'}+x^{''},y+y^{'}+y^{''}\right)=(x,y)+\left(x^{'}+x^{''},y^{'}+y^{''}\right)$$

$$=u+(v+w).$$

3. *Il existe un élément neutre* $0_E=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$u+0_{\mathbb{R}^2}=(x+0,y+0)=(x,y)=u.$$

4. *Tout* $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *admet un symétrique* $u'=(-x,-y)\in\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$u+u'=(x+(-x),y+(-y))$$

$$=(x-x,y-y)=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}.$$

5.

$$1_{\mathbb{k}}\bullet u=(1\times x,1\times y)=(x,y)=u.$$

6.

$$\alpha\bullet(\beta\bullet u)=\alpha\bullet(\beta x,\beta y)$$

$$=(\alpha\beta x,\alpha\beta y)=(\alpha\beta)\bullet u.$$

7.

$$(\alpha+\beta)\bullet u=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y)$$

$$=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y)$$

$$=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x,\beta y)$$

$$=\alpha\bullet u+\beta\bullet u.$$

8.

$$\alpha\bullet[u+v]=\alpha\bullet\left(x+x^{'},y+y^{'}\right)$$

$$=\left(\alpha\left(x+x^{'}\right),\alpha\left(y+y^{'}\right)\right)$$

$$=\left(\alpha x+\alpha x^{'},\alpha y+\alpha y^{'}\right)$$

$$=(\alpha x,\alpha y)+\left(\alpha x^{'},\alpha y^{'}\right)$$

$$=\alpha\bullet u+\alpha\bullet v.$$

Conclusion: $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On fait même manière pour les autres ensembles.

2. Montrer que tout corps commutatif est un $\mathbb{k}$ espace vectoriel

Tout corps cmmutatif $\mathbb{k}$ est un espace vectoriel sur lui même. On vérifie les 8 propriétés à partir la définition d'un corps commutatif..

3. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

$(x, y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right)$ et $\lambda \bullet \left(x^{'}, y^{'}\right) = (2\lambda x, 0)$

Pour la 5ème condition, on a

$$1_{\mathbb{k}} \bullet u = 1 \bullet (x, y) = (2\,(1)\,x, 0) = (2x, 0)$$

$$1_{\mathbb{k}} \bullet u \overset{??}{=} u$$

On peut prendre un contre exemple, donc pour

$$u = (x, y) = (1, 1)\,,$$

on trouve

$$1_{\mathbb{k}} \bullet u = (2, 0) \neq (1, 1)\,.$$

Donc, $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\right\}$$

1. Est ce que $\lambda u \in E$ pour $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$?

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y) \in E$, donc $xy \geq 0$.

On a:

$$\lambda \bullet u = \lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \overset{??}{\in} E$$

$$(\lambda x)\,(\lambda y) = \lambda^2\,(xy) \geq 0,$$

alors, $\lambda u \in E$.

2. Trouver deux vecteurs $u, v \in E$ dont $u + v \notin E$.

Soient $u = (x, y)\,, v = \left(x^{'}, y^{'}\right) \in E$, donc $xy \geq 0$ et $x^{'}y^{'} \geq 0$.

On a:

$$u + v = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \overset{??}{\in} E$$

$$\left(x + x^{'}\right)\left(y + y^{'}\right) = xy + x^{'}y^{'} + xy^{'} + x^{'}y \overset{??}{\geq} 0,$$

pour $u=(1,2)\,, v=(-2,-1)$, on obtient $u,v\in E$ mais $u+v=(-1,1)\notin E$.
E **est il un** $\mathbb{R}$ **espace vectoriel?**
E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3 (*Sous espace vectoriel*)
1. *Sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$**:**
- $F=\mathbb{Z}^2$

Il faut vérifier les conditions suivante:

$$(i)\ 0_{\mathbb{R}^2}\in F$$

$$(ii)\ \forall u,v\in F,\ u+v\in F$$

$$(iii)\ \forall u\in F,\forall\alpha\in\mathbb{k},\ \alpha.u\in F$$

On peut regrouper (ii) et (iii) par la condition suivante

$$\forall u,v\in F,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{k},\ \alpha.u+\beta.v\in F$$

On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in F$.
(ii) Soient $u=(x,y),v=(x^{'},y')\in F$, donc

$$u+v=\left(\underbrace{x+x^{'}}_{a},\underbrace{y+y'}_{b}\right)\in F\quad\text{, car } a,b\in\mathbb{Z}.$$

(iii) Soient $u=(x,y)\in F,\alpha\in\mathbb{R}$ donc

$$\alpha\bullet u=\left(\underbrace{\alpha x}_{A},\underbrace{\alpha y}_{B}\right)\overset{??}{\in}F$$

Si on prend $u=(-1,3)$ et $\alpha=\frac{1}{2}$ on trouve

$$\alpha\bullet u=\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right)\notin F.$$

Alors, F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,|x|=|y|\right\}$

On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in F$, car

$$\left|x_{0_{\mathbb{R}^2}}\right|=0=\left|y_{0_{\mathbb{R}^2}}\right|$$

(ii) Soient $u=(x,y),v=(x^{'},y')\in F$, donc

$$|x|=|y|\quad\text{et}\quad\left|x^{'}\right|=|y'|$$

$$u+v=\left(x+x^{'},y+y'\right)\in E_1?$$

c'est à dire

$$\left|x+x^{'}\right| = |y+y'|?$$

Si on prend $x=2, y=2$ et $x^{'}=-2, y'=2$ on trouve

$$|x| = |y| \quad \text{et} \quad \left|x^{'}\right| = |y'|$$

et

$$\left|x+x^{'}\right| \neq |y+y'|$$

ce qui donne $u+v \notin F$.
Alors, F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\right\}$
On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$, car

$$x_{0_{\mathbb{R}^2}} = y_{0_{\mathbb{R}^2}} = 0$$

(ii) Soient $u=(x,y), v=(x^{'},y') \in F$, donc

$$y = x \quad \text{et} \quad y^{'} = x^{'}$$

$$u+v = \left(\underbrace{x+x^{'}}_{a}, \underbrace{y+y'}_{b}\right) \in F?$$

c'est à dire

$$b = a?$$

$$b = y+y' = x+x^{'} = a$$

ce qui donne $u+v \in F$.
(iii) Soient $u=(x,y) \in F, \alpha \in \mathbb{R}$ donc

$$y = x$$

$$\alpha u = \left(\underbrace{\alpha x}_{A}, \underbrace{\alpha y}_{B}\right) \in F?$$

c'est à dire

$$B = A?$$

$$B = \alpha y = \alpha x = A$$

ce qui donne $\alpha u \in F$.
Alors, F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\right\}$

On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$, car

$$\left(x_{0_{\mathbb{R}^2}} = 0\right) \leq \left(y_{0_{\mathbb{R}^2}} = 0\right)$$

(ii) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y), v = (x^{'}, y') \in F$, donc

$$x \leq \quad \text{et} \quad x^{'} \leq y^{'}$$

$$\alpha u + \beta v = \left(\underbrace{\alpha x + \beta x^{'}}_{a}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{b}\right) \in F?$$

c'est à dire

$$a \leq b?$$

pour $\alpha = 1, \beta = -2$, $u = (1, 2)$ et $v = (-4, -1)$, on obtient $u, v \in E$ mais $\alpha u + \beta v = (9, 0) \notin F$. Alors, F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. *Sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$:

- $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\right\}$

On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_1$, car

$$x_{0_{\mathbb{R}^3}} - y_{0_{\mathbb{R}^3}} + 2z_{0_{\mathbb{R}^3}} = 0$$

(ii) Soient $u = (x, y, z), v = (x^{'}, y', z^{'}) \in F_1$, donc

$$x - y + 2z = 0 \quad \text{et} \quad x^{'} - y^{'} + 2z^{'} = 0$$

$$u + v = \left(\underbrace{x + x^{'}}_{a}, \underbrace{y + y'}_{b}, \underbrace{z + z'}_{c}\right) \in F_1?$$

c'est à dire

$$a - b + 2c = 0?$$

$$a - b + 2c = \left(x + x^{'}\right) - (y + y') + 2\,(z + z')$$

$$= (x - y + 2z) + \left(x^{'} - y^{'} + 2z^{'}\right) = 0$$

ce qui donne $u + v \in F_1$.
(iii) Soient $u = (x, y, z) \in F_1, \alpha \in \mathbb{R}$ donc

$$x - y + 2z = 0$$

$$\alpha u = \left(\underbrace{\alpha x}_{A}, \underbrace{\alpha y}_{B}, \underbrace{\alpha z}_{C}\right) \in F_1?$$

c'est à dire

$$A - B + 2C = 0?$$

$$A - B + 2C = (\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z)$$

$$= \alpha(x - y + 2z) = 0$$

ce qui donne $\alpha u \in F_1$.
Alors, F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
F_2 n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin F_2$
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0\}$
F_3 n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Car il existe deux vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 2, 3)$ dans F_3 tels que

$$u + v = (1, 4, 3) \notin F_3.$$

- $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0 \text{ et } z - x = 0\}$
F_4 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut vérifier facilement les trois conditions.

Exercice 4 (*Sous espace vectoriel*)
Soient E, F deux ensembles définis par :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 2y = 0\}$$

$$F = \{\lambda(1, 2) \in \mathbb{R}^2 / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E et F sont des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
On vérifie les trois conditions pour chaque ensemble.
2. Déterminer $E \cap F$
Soit $X = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$X \in E \cap F \Leftrightarrow X \in E \quad \text{et} \quad X \in F$$

Alors,

$$X \in E \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

et

$$X \in F \Rightarrow X = (a, b) = \lambda(1, 2)$$

ou bien, on résout l'équation vectorielle: $X_E = X_F$.
Donc, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0 & ...... \quad (1) \\ a = \lambda & ...... \quad (2) \\ b = 2\lambda & ...... \quad (3) \end{cases}.$$

On remplace a et b dans (1), on obtient:

$$3\lambda + 4\lambda = 0 \;\Leftrightarrow \lambda = 0,$$

d'où

$$X = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

3. $E \cap F$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
On sait que l'intersection de deux sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel. Donc $E \cap F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (Famille libre - Famille liée)
1. Pour chacune des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes dire si elle est libre ou liée.
On dit que la famille $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ est **libre** si

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

et on dit qu'elle est **liée** si

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{k}^n - \{(0,0,...,0)\}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0_E$$

(a)- $a = (1,0), b = (0,1), c = (2,3)$
La famille $\{a = (1,0), b = (0,1), c = (2,3)\}$ est liée, car

$$card(\{a,b,c\}) = 3 \succ \dim \mathbb{R}^2$$

et on sait que toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ possède au maximum n élément.
(b)- $a = (3,2), b = (4,9)$
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 0 \;\; .... \;\; (1) \\ 2\alpha + 9\beta = 0 \;\; .... \;\; (2) \end{cases}$$

2×Eq(1) - 3×Eq(2) donne

$$-19\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

Eq(2) donne

$$\alpha = -\frac{9}{2}\beta = 0$$

Alors, on trouve

$$\alpha = \beta = 0.$$

Ce qui montre que la famille est libre.
(c)- $a = (2,3)\,, b = (1,3)\,, c = (0,0)$
La famille $\{a = (2,3)\,, b = (1,3)\,, c = (0,0)\}$ est liée, car

$$card\left(\{a,b,c\}\right) = 3 \succ \dim \mathbb{R}^2$$

2$^{\text{ème}}$ méthode
On sait que toute famille contient l'élément neutre est liée.
Donc, il existe $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$, tel que $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^2}$.
(d)- $a = (1,0)\,, b = (2,1)$
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \\ \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Ce qui montre que la famille est libre.
2$^{\text{ème}}$ méthode
Les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires (c.à.d il n'existe pas un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda b$), donc la famille est libre.
2. Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et déterminer leur relation de dépendance.
(a)- $a = (1,1,-1)\,, b = (1,2,0)\,, c = (3,4,-2)$
On résout l'équation vectorielle suivante

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3}$$

telle que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
On a:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \quad ... \quad (1) \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \; ... \quad (2) \\ -\alpha - 2\gamma \qquad\qquad .... \quad (3) \end{cases}$$

Eq(3) donne
$$\alpha = -2\gamma$$

On remplace α dans Eq(1) et Eq(2), on obtient
$$\begin{cases} -2\gamma + \beta + 3\gamma = 0 \\ \\ -2\gamma + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\gamma$$

On prend $\gamma = -1$, on trouve $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tel que
$$2a + b - c = 0_{\mathbb{R}^3}$$

d'où les vecteurs $a = (1, 1, -1)\,, b = (1, 2, 0)\,, c = (3, 4, -2)$ sont linéairement dépendants et leur relation de dépendance est
$$2a + b - c = 0_{\mathbb{R}^3}$$

(b)- $u = (1, 2, 3)\,, v = (0, 1, -1)\,, w = (1, 5, 0)$
On résout l'équation vectorielle suivante
$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

telle que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
On a:
$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

On trouve
$$\beta = 3\alpha$$
$$\gamma = -\alpha$$

On prend $\alpha = 1$, on trouve $\beta = 3$ et $\gamma = -1$. Donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, -1) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tel que
$$u + 3v - w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

d'où les vecteurs $u = (1, 2, 3)\,, v = (0, 1, -1)\,, w = (1, 5, 0)$ sont linéairement dépendants et leur relation de dépendance est

$$u + 3v - w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

3. Pour quelles valeurs du paramètre réel m la famille $\{\underbrace{(3,1,m)}_{X}, \underbrace{(1,3,2)}_{Y}, \underbrace{(1,-1,4)}_{Z}\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On a:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad ... \ (1) \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \quad ... \ (2) \\ m\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \ ... \ (3) \end{array} \right.$$

De l'équation (2) on trouve:

$$\gamma = \alpha + 3\beta$$

on remplace γ dans Eq(1) et Eq(3), on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + \beta + (\alpha + 3\beta) = 0 \\ \\ m\alpha + 2\beta + 4(\alpha + 3\beta) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \beta = 0 & ... \quad (4) \\ \\ (m+4)\alpha + 14\beta = 0 & ... \quad (5) \end{array} \right.$$

Eq(4) $\times$ (14) -Eq(5) donne

$$(10 - m)\alpha = 0$$

Donc, la famille $\{\underbrace{(3,1,m)}_{X}, \underbrace{(1,3,2)}_{Y}, \underbrace{(1,-1,4)}_{Z}\}$ est libre si

$$10 - m \neq 0$$

C'est-à-dire

$$m \neq 10$$

Alors,

$$m \in \mathbb{R} - \{10\}.$$

Exercice 6 (Famille génératrice)

1. Expliquer pourquoi les trois vecteurs $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ **génèrent** $\mathbb{R}^3$
On dit que la famille $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ est **génératrice de** E si

$$\forall u \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}, u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Pour tout vecteur $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe trois scalaires $\alpha_1 = a, \alpha_2 = b, \alpha_3 = c$, tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$= a\,(0,0,1) + b\,(0,1,0) + c\,(0,0,1)$$

$$= (a,b,c) = X$$

D'où La famille $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$
.
2. Les vecteurs suivants forment-ils une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$**?**
(a)- $u_1 = (-1,4,5)\,, u_2 = (0,3,1)$
La famille $\{u_1 = (-1,4,5)\,, u_2 = (0,3,1)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, car

$$card\,(\{u_1 = (-1,4,5)\,, u_2 = (0,3,1)\}) = 2 \prec \dim \mathbb{R}^3$$

et on sait que toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ possède au minimum n élément.
(b)- $u_1 = (1,2,3)\,, u_2 = (0,1,1)\,, u_3 = (0,2,1)$
Soit $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche trois scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ s'il existe tels que

$$X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i$$

On a:

$$X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b - 2a - 2\alpha_3 \\ 3a + b - 2a - 2\alpha_3 + \alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b - 2a - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 = a + b - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b - 2a - 2\,(a + b - c) = -4a - b + 2c \\ \alpha_3 = a + b - c \end{cases}$$

Alors, pour tout vecteur $X=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, il existe trois scalaires $\alpha_1=a,\alpha_2=-8a-b+2c,\alpha_3=3a+b-c$ tels que $X=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i u_i$.
D'où La famille $\{u_1=(1,2,3)\,,u_2=(0,1,1)\,,u_3=(0,2,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
(c)- $u_1=(1,0,0)\,,u_2=(0,1,0)\,,u_3=(2,5,0)$
On remarque que

$$2u_1+5u_2-u_3=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc,

$$Vect\,(u_1,u_2,u_3)=Vect\,(u_1,u_2)$$

Et comme la famille $\{u_1=(1,0,0)\,,u_2=(0,1,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors la famille $\{u_1=(1,0,0)\,,u_2=(0,1,0)\,,u_3=(2,5,0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
(d)- $u_1=(1,2,0)\,,u_2=(0,1,0)\,,u_3=(3,7,11)\,,u_4=(0,0,1)\,.$
On remarque que

$$3u_1+u_2+-u_3+11u_4=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc,

$$Vect\,(u_1,u_2,u_3,u_4)=Vect\,(u_1,u_2,u_4)$$

Et comme la famille $\{u_1,u_2,u_4\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, car
Pour tout vecteur $X=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, il existe trois scalaires $\alpha_1=a,\alpha_2=b-2a,\alpha_3=c$, tels que:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_4=a\,(1,2,0)+(b-2a)\,(0,1,0)+c\,(0,0,1)$$

$$=(a,b,c)=X.$$

Alors, la famille $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Famille libre - Famille génératrice)
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la famille de vecteurs suivants:

$$v_1=(0,1,3)\,,v_2=(2,0,-1)\,,v_3=(-2,0,1)$$

$\{v_1,v_2,v_3\}$ **est-elle libre?** (On remarque que $v_2=-v_3$)

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

On prend $\alpha_2 = 1$. Donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 1) \in \mathbb{k}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tel que

$$v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ce qui montre que la famille est liée.
Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
On a:

$$Vect\,(v_1, v_2, v_3) = Vect\,(v_1, v_2)$$

car, $v_3 = -v_2$.
Et comme la famille $\{v_1, v_2\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ ($card\,(\{v_1, v_2\}) = 2 \prec \dim \mathbb{R}^3$), alors la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2ème méthode
Soit $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche trois scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ s'il existe tels que

$$X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i$$

On a:

$$X=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i u_i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=a \\ \\ \alpha_1=b \\ \\ 3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\alpha_2-\alpha_3\right)=a-b \\ \\ \alpha_1=b \qquad\qquad\qquad ..... \quad (*) \\ \\ \alpha_2-\alpha_3=3b-c \end{cases}$$

On peut prend un vecteur $X=(3,1,1)\in\mathbb{R}^3$, tel que l'équation $X=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i v_i$ n'admet pas de solution.
D'où la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Sinon quel sous espace vectoriel engendre-elle?
Soit $X=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$X\in Vect\left(v_1,v_2,v_3\right)\Leftrightarrow\left(\tfrac{a-b}{2}\right)=3b-c \quad \text{d'aprés } (*)$$

$$\Leftrightarrow a-7b+2c=0$$

Donc la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ engendre le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x-7y+2z=0\right\}.$$