Corrigé de fiche TD 3 (ALG II)

2023 - 2024

Exercice 1:
Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires ?
(a). $E=\mathbb{R}^3, F=\mathbb{R}^3, f_1(x,y,z)=(x+2y-5z, x-5y+z, y-z)$
Soient $u=(x,y,z), v=\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right)\in\mathbb{R}^3$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a:
(i)

$$f_1(u+v)=f_1\left(x+x^{'}, y+y^{'}, z+z^{'}\right)$$

$$=\left(x+x^{'}+2y+2y^{'}-5z-5z^{'}, x+x^{'}-5y-5y^{'}+z+z^{'}, y+y^{'}-z-z^{'}\right)$$

$$=(x+2y-5z, x-5y+z, y-z)+\left(x^{'}+2y^{'}-5z^{'}, x^{'}-5y^{'}+z^{'}, y^{'}-z^{'}\right)$$

$$=f_1(x,y,z)+f_1\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right)$$

$$=f_1(u)+f_1(v)$$

(ii)

$$f_1(\alpha u)=f_1(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$=(\alpha x+2\alpha y-5\alpha z, \alpha x-5\alpha y+\alpha z, \alpha y-\alpha z)$$

$$=\alpha(x+2y-5z, x-5y+z, y-z)$$

$$=\alpha f_1(u)$$

De (i) et (ii), on déduit que f_1 est une application linéaire.
(b). $E=\mathbb{R}^3, F=\mathbb{R}^3, f_2(x,y,z)=(x+2y+1, 2y, z)$
On a:

$$f_2(0_{\mathbb{R}^3})=f_2(0,0,0)=(1,0,0)\neq 0_{\mathbb{R}^3},$$

d'où f_2 n'est pas une application linéaire.
(c). $E=\mathbb{R}^3, F=\mathbb{R}^3, f_3(x,y,z)=(x+2y+z, 2yz, x+z)$
Pour $X=(0,1,1)$ et $Y=(1,0,2)$, on a:

$$f_3(X+Y)=f_3(1,1,3)=(6,6,4)$$

et

$$f_3(X)+f_3(Y)=(3,2,1)+(3,0,3)=(6,2,4)$$

Alors, il existe $X=(0,1,1)$,$Y=(1,0,2)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f_3(X+Y)\neq f_3(X)+f_3(Y)$, d'où f_3 n'est pas une application linéaire.

(d). $E=\mathbb{R}^2, F=\mathbb{R}, f_4(x,y,z)=(x-y+3z)$
Soient $u=(x,y,z), v=\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)\in\mathbb{R}^3$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
On a:

$$f_4(\alpha u+\beta v)=f_4\left(\alpha x+\beta x^{'},\alpha y+\beta y^{'},\alpha z+\beta z^{'}\right)$$

$$=\left(\alpha x+\beta x^{'}-\alpha y-\beta y^{'}+3\alpha z+3\beta z^{'}\right)$$

$$=(\alpha x-\alpha y+3\alpha z)+\left(\beta x^{'}-\beta y^{'}+3\beta z^{'}\right)$$

$$=\alpha f_4(x,y,z)+\beta f_4\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)$$

$$=\alpha f_4(u)+\beta f_4(v)$$

Donc, f_4 est une application linéaire.

Exercice 2:
Soit f l'application définie par:

$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)\mapsto(x+y+z,x-y+z,x+3y+z)\end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire
Soient $u=(x,y,z), v=\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)\in\mathbb{R}^3$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On a:

$$f(\alpha u+\beta v)=f\left(\alpha x+\beta x^{'},\alpha y+\beta y^{'},\alpha z+\beta z^{'}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c}\alpha x+\beta x^{'}+\alpha y+\beta y^{'}+\alpha z+\beta z^{'},\alpha x+\beta x^{'}-\left(\alpha y+\beta y^{'}\right)+\left(\alpha z+\beta z^{'}\right), \\ \alpha x+\beta x^{'}+3\left(\alpha y+\beta y^{'}\right)+\left(\alpha z+\beta z^{'}\right)\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}=(\alpha x+\alpha y+\alpha z,\alpha x-\alpha y+\alpha z,\alpha x+3\alpha y+\alpha z) \\ +\left(\beta x^{'}+\beta y^{'}+\beta z^{'},\beta x^{'}-\beta y^{'}+\beta z^{'},\beta x^{'}+3\beta y^{'}+\beta z^{'}\right)\end{array}$$

$$=\alpha(x+y+z,x+y+z,x+3y+z)+\beta\left(x^{'}+y^{'}+z^{'},x^{'}+y^{'}+z^{'},x^{'}+3y^{'}+z^{'}\right)$$

$$=\alpha f(x,y,z)+\beta f\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)$$

$$=\alpha f(u)+\beta f(v).$$

Donc, f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f , donner une base de $\ker f$
Par définition on a:

$$\ker f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

Alors, $u = (x, y, z) \in \ker f$ si et seulement si $f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Résolvons l'équation vectorielle $f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \\ x - y + z = 0 \\ \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$u = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

Posons $u_1 = (1, 0, -1)$.
Alors, $\ker f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_1 = (1, 0, -1)$.

$$\ker f = vect(u_1(1, 0, -1)).$$

La famille $B_1 = \{u_1\}$ est génératrice de $\ker f$ et comme elle est libre (car $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$), alors elle forme une base de $\ker f$.
f est-elle injective?
Comme $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors l'application f n'est pas injective.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ ainsi que $rg(f)$. f est-elle surjective?
Par définition on a:

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Alors, $Y = (a, b, c) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, Y = f(x, y, z)$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z)$$

$$= (x, x, x) + (y, -y, 3y) + (z, z, z)$$

$$= x(1, 1, 1) + y(1, -1, 3) + z(1, 1, 1)$$

Posons

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 3).$$

Alors, $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 3)$.

$$\operatorname{Im} f = vect(v_1(1, 1, 1), v_2(1, -1, 3)).$$

Rang de f:
D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker f + rg\,(f) = \dim E = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc,

$$rg\,(f) = \dim E - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

f est-elle surjective?
Comme $\dim (\operatorname{Im} f) \neq \dim F$, $(\dim (\operatorname{Im} f) = rg\,(f))$ alors, l'application f n'est pas surjective.
4. Mêmes questions pour l'application suivante:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, x + y) \end{aligned}$$

Exercice 3:
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{aligned} f\,(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f\,(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f\,(e_3) &= 4e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Déterminer l'expression de $f\,(x, y, z)$.

$$f\,(x, y, z) = f\,(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$= xf\,(e_1) + yf\,(e_2) + zf\,(e_3)$$

$$= x\,(e_1 + e_2 + e_3) + y\,(2e_1 - e_2 + 2e_3) + z\,(4e_1 + e_2 + 4e_3)$$

$$= (x + 2y + 4z)\,e_1 + (x - y + z)\,e_2 + (x + 2y + 4z)\,e_3$$

$$= (x + 2y + 4z, x - y + z, x + 2y + 4z)$$

2. Déterminer le noyau et l'image de f .
On a:

$$\ker f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f\,(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

On résout l'équation vectorielle $f\,(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 4z = 0 \\ \\ x - y + z = 0 \\ \\ x + 2y + 4z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ \\ y = -z \end{array}\right.$$

Donc,

$$u = (-2z, -z, z) = z\,(-2, -1, 1)$$

Posons $u_1 = (-2, -1, 1)$.
Alors, $\ker f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_1 = (-2, -1, 1)$.

$$\ker f = vect\,(u_1 = (-2, -1, 1)) .$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$
Par définition on a:

$$\operatorname{Im} f = \left\{ f\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On a:

$$f\,(x, y, z) = (x + 2y + 4z, x - y + z, x + 2y + 4z)$$

$$= (x, x, x) + (2y, -y, 2y) + (4z, z, 4z)$$

$$= x\,(1, 1, 1) + y\,(2, -1, 2) + z\,(4, 1, 4)$$

Posons

$$v_1 = (1, 1, 1)\,, v_2 = (2, -1, 2)\,, v_3 = (4, 1, 4)\,.$$

Alors, $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)\,, v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (4, 1, 4)$.

$$\operatorname{Im} f = vect\,(v_1 = (1, 1, 1)\,, v_2 = (2, -1, 2)\,, v_3 = (4, 1, 4)) .$$

3. $\ker f$ **et** $\operatorname{Im} f$ **sont-ils supplémentaires dans** $\mathbb{R}^3$.
On a la famille $B = \{u_1\,(-2, -1, 1)\}$ est génératrice de $\ker f$ et comme $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors elle est libre et donc elle forme une base de $\ker f$ et de plus

$$\dim \ker f = Card\,(B) = 1.$$

D'apres le théorème d rang, on trouve

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 2.$$

On peut choisir la famille $B' = \{v_1 = (1, 1, 1)\,, v_2 = (2, -1, 2)\}$ comme base de $\operatorname{Im} f$. (On a $v_3 = 2v_1 + v_2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$).

Alors,
(i).

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3.$$

(ii). La famille $B'' = \{u_1(-2,-1,1), v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,-1,2)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
De (i) et (ii) on déduit que

$$\operatorname{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 4:
Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \mapsto (2y - z, -x + 3y - z, -2x + 4y - z) \end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau de f, donner une base de $Kerf$
On a:

$$\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

On résout l'équation vectorielle $f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} 2y - z = 0 \\ \\ -x + 3y - z = 0 \\ \\ -2x + 4y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2y \\ \\ x = y \end{array}\right.$$

Donc,

$$u = (y, y, 2y) = y(1,1,2)$$

Posons $u_1 = (1,1,2)$.
Alors, $\ker f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_1 = (1,1,2)$.

$$\ker f = vect\,(u_1 = (1,1,2)).$$

La famille $B_1 = \{u_1\}$ est génératrice de $\ker f$ et comme elle est libre (car $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$), alors elle forme une base de $\ker f$.
Déterminer le rang de f
D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker f + rg(f) = \dim E = \dim \mathbb{R}^3,$$

donc,

$$rg(f) = \dim E - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

2. Montrer que la famille $B = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ n'est pas libre.

$$B = \{f(e_1) = (0, -1, -2)\,, f(e_2) = (2, 3, 4)\,, f(e_3) = (-1, -1, -1)\}$$

On a: B est une partie de $\operatorname{Im} f$ et $card\,(B) = 3 \succ \dim \operatorname{Im} f$, alors la famille B est liée.
Ou bien, résolvons l'équation vectorielle suivante

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f(e_i) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f(e_i) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \text{... Eq(1)} \\ \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \text{... Eq(2)} \\ \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \text{... Eq(3)} \end{cases}$$

De l'équation Eq(1), on obtient

$$\alpha_3 = 2\alpha_2$$

On remplace α_3 dans Eq(2) et Eq(3), on trouve:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_2 = 0 \\ \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_2 = 0 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

Pour $\alpha_2 = 1$ on trouve $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_3 = 2$ et on a donc

$$f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ce qui montre que la famille B est liée.
3. Déterminer une sous famille de B qui soit libre,
On choisit la sous famille suivante

$$B^{'} = \{f(e_1) = (0, -1, -2)\,, f(e_2) = (2, 3, 4)\}$$

Les deux vecteurs $f(e_1) = (0, -1, -2)$ et $f(e_2) = (2, 3, 4)$ ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $f(e_1) = \lambda f(e_2)$, donc la famille $B^{'}$ est libre.

Ecrire les autres vecteurs en fonction de ceux ci .

On a

$$f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

donc,

$$f(e_3) = -\tfrac{1}{2} f(e_1) - \tfrac{1}{2} f(e_2).$$

4. Donner une base de Imf.

La famille $B^{'}$ est libre et génératrice de $\operatorname{Im} f$, alors elle forme une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 5:

1-Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application linéaire injective, alors

$$\dim \ker f = 0,$$

donc d'après le théorème du rang, on trouve

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

qui est impossible, car $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $F = \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$.

2-Existe-t-il des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$?

Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire surjective, alors

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim F = 2,$$

donc d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

qui est impossible, car $\ker f$ est un sous espace vectoriel de $E = \mathbb{R}$ et $\dim \ker f \leq 1$.