Corrigé de fiche TD 4 (ALG II)

2023 - 2024

Exercice 1 (Matries représentatives des appliations linéaires)
Déterminer les matrices représentatives des applications linéaires relativement aux bases canoniques

1.

$$f: \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x,0) \end{aligned}$$

On consédère les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Soient $B_0 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$
et $B_1 = \left\{e_1^{'} = (1,0,0), e_2^{'} = (0,1,0), e_3^{'} = (0,0,1)\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour déterminer les élément de la jème colonne, on calcules les coordonnées du vecteur $f\left(e_j^{'}\right)$ dans la base B_0.
On a:

$$f\left(e_1^{'}\right) = (1,0) = 1 \times e_1 + 0 \times e_2,$$

donc les éléments de la première colonne sont 1 et 0.

$$f\left(e_2^{'}\right) = (0,0) = 0 \times e_1 + 0 \times e_2,$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont 0 et 0.

$$f\left(e_3^{'}\right) = (0,0) = 0 \times e_1 + 0 \times e_2,$$

donc les éléments de la troisième colonne sont 0 et 0.
Alors, la matrice associée à l'application f dans les bases B_1 et B_0 est:

$$M_{B_1,B_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$f: \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x + 2y \end{aligned}$$

Soient $B_0 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B_2 = \left\{e_1^{''} = 1\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
On a:

$$f(e_1) = 1 = 1 \times e_1^{''},$$

donc l'élément de la première colonne est 3.

$$f(e_2) = 2 = 2 \times e_1^{''},$$

donc l'élément de la deuxième colonne est 2.
Alors, la matrice associée à l'application f dans les bases B_0 et B_2 est:

$$M_{B_0,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) \mapsto (x-y, x, -2y, x+y) \end{aligned}$$

La matrice associée à l'application f dans les bases canoniques est:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ & x \mapsto (x, -x, 5x) \end{aligned}$$

La matrice associée à l'application f dans les bases canoniques est:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (*Somme et produit de deux matrices*)
Soient les matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments (i,j) tels que la somme $A_i + A_j$ et le produit $A_i A_j$ soient possibles.
La somme $A_i + A_j$ soit possible si $A_i, A_j \in M_{n,m}(\mathbb{k})$, donc on peut calculer

$$A_1 + A_1, A_1 + A_4, A_2 + A_2, A_3 + A_3, A_4 + A_4 \text{ et } A_4 + A_1.$$

Alors,

$$(i,j) \in \{(1,1), (1,4), (2,2), (3,3), (4,4), (4,1)\}.$$

Le produit $A_i \times A_j$ soit possible si $A_i \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ et $A_j \in M_{m,p}(\mathbb{k})$, donc on peut calculer

$$A_1 \times A_1, A_1 \times A_2, A_1 \times A_4, A_3 \times A_1, A_3 \times A_4, A_4 \times A_1, A_4 \times A_2 \text{ et } A_4 \times A_4.$$

Alors,

$$(i,j) \in \{(1,1), (1,2), (1,4), (3,1), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}.$$

2. Calculer $A_1 + A_4, A_4 + A_1, A_1 A_4, A_4 A_1, A_1.I_3$ (I_3 la matrice unité).
$A_1 + A_4$:

$$A_1 + A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_4 + A_1$: La somme est commutative.

$$A_4 + A_1 = A_1 + A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_1 A_4$:

$$A_1 A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A_4 A_1$: Le produit n'est pas commutatif.

$$A_4 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_1.I_3$: L'élément neutre est la matrice unité.

$$A_1.I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1.$$

3. Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ -Conlure .
On a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0).$$

Donc,

$$A \times B = (0) \nRightarrow A = (0) \text{ ou } B = (0).$$

C'est-à-dire $\exists A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0)$ et $\exists B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq (0)$, tel que $A \times B = (0)$. Alors, l'élément neutre admet de diviseurs.

4. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a)- Trouver une matrice C telle que $2A - 2B - C = 0$

$$2A - 2B - C = 0 \Leftrightarrow C = 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

b)- Trouver une matrice D telle que $A + B + C - 4D = 0$

$$A + B + C - 4D = 0 \qquad \Leftrightarrow D = \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{4}C$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (*Déterminants*)

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes:

a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1) \times (4) - (3) \times (2) = -2.$$

b.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{, on développe suivant la 3ème ligne}$$

$$= (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8.$$

c.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{, on développe suivant la 1ère ligne}$$

$$= (-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

Ou bien, comme C est une matrice triangulaire inférieur, alors

$$\det C = c_{11} \times c_{22} \times c_{33} = 3 \times 4 \times 1 = 12.$$

2. Calculer $\det({}^tB)$ **et** trC**.**

$$\det({}^tB) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \det B = 8.$$

$$trC = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 3 + 4 + 1 = 8.$$

Exercice 4 (Rang d'une matrice)
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer son rang.
1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que le rang d'une matrice est le rang de ces vecteurs lignes (ou colonnes).
Alors

$$\begin{aligned} rg\,(A) &= \dim\left(vect\left(C_1\,(1,4,7,0)\,, C_2\,(2,5,8,1)\,, C_3\,(3,6,9,0)\right)\right) \\ &= \dim\left(vect\left(L_1\,(1,2,3)\,, L_2\,(4,5,6)\,, L_3\,(7,8,9)\,, L_4\,(0,1,0)\right)\right) \end{aligned}$$

A est une matrice de 4 lignes et 3 colonnes, alors $rg\,(A) \leq 3$.
La famille $\{C_1\,(1,4,7,0)\,, C_2\,(2,5,8,1)\,, C_3\,(3,6,9,0)\}$ est libre, donc $\dim\left(vect\left(C_1, C_2, C_3\right)\right) = 3$, d'où $rg\,(A) = 3$.
2ème methode:
On choisit la sous matrice suivante:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\det A^{'} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Donc,

$$rg\,(A) = 3.$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{car } C_2 = C_3.$$

Donc $rg\,(B) \leq 2$.
On choisit la sous matrice suivante:

$$B^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\det B^{'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc,

$$rg\,(B) = 2.$$

Exercice 5
Soient s le nombre de manteaux taille S, m le nombre de manteaux taille M, l le nombre de manteaux taille l et x le nombre de manteaux taille XL.
Soient a la quantité de fil de coton, b la quantité de fil de polyester et c la quantité de fil de polyamide.
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 400 & 1000 \\ 1000 & 500 & 700 \\ 500 & 600 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 1.5 & 1.7 & 1.9 & 2.1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} s \\ m \\ l \\ x \end{pmatrix}$$

Alors, la relation entre les matrices est

$$X = A \times B \times Y$$

donc,

$$X = \begin{pmatrix} 500 & 400 & 1000 \\ 1000 & 500 & 700 \\ 500 & 600 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 1.5 & 1.7 & 1.9 & 2.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ m \\ l \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2100s + 2390m + 2680l + 2970x \\ 2300s + 2680m + 3010l + 3340x \\ 800s + 910m + 1020l + 1130x \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (*Matrices inversibles*)
On considère la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M_1 est inversible
On a:

$$\det M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{, on développe suivant la 3ème ligne}$$

$$= (-1)^{3+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 14.$$

Comme $\det M_1 \neq 0$, alors la matrice M_1 est inversible.
2. Déterminer M_1^{-1} en utilisant les cofacteurs
On a:

$$M_1^{-1} = \tfrac{1}{\det M_1} {}^t C$$

où C comatrice (matrice de cofacteurs).

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

M_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne.
On calcule les cofacteurs

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Alors, la matrice C est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$M_1^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

3. Déterminer M_1^{-1} en utilisant la méthode de Gauss Jordan
Voici la matrice augmentée

$$(M_1|I_3) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

On effectue l'opération élémentaire suivante $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, alors on trouve la nouvelle matrice augmentée suivante

$$\left(M_1^{(1)}|I_3^{(1)}\right) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix}$$

On multiplie la ligne $L_2^{(1)}$ par $\left(\frac{1}{4}\right)$ (c'est-à-dire $L_2^{(1)} \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right) L_2^{(1)}$), on obtient

$$\left(M_1^{(2)}|I_3^{(2)}\right) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{matrix}$$

On effectue l'opération élémentaire suivante $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - 2L_2^{(2)}$, alors on trouve

$$\left(M_1^{(3)}|I_3^{(3)}\right) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(3)} \\ L_2^{(3)} \\ L_3^{(3)} \end{matrix}$$

On multiplie la ligne $L_3^{(3)}$ par $\left(\frac{2}{7}\right)$ (c'est-à-dire $L_3^{(3)} \leftarrow \frac{2}{7} L_3^{(3)}$, on obtient

$$\left(M_1^{(4)}|I_3^{(4)}\right) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(4)} \\ L_2^{(4)} \\ L_3^{(4)} \end{matrix}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2^{(4)} \leftarrow L_2^{(4)} + \frac{7}{4}L_3^{(4)}$ et $L_1^{(4)} \leftarrow L_1^{(4)} - 2L_3^{(4)}$, alors on trouve

$$\left(M_1^{(5)}|I_3^{(5)}\right) : \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(5)} \\ L_2^{(5)} \\ L_3^{(5)} \end{array}$$

Par conséquent,

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

4. Même questions pour

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On $\det M_2 = 18 \neq 0$, alors M_2 est inversible.
L'inverse de M_2 est:

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Matrice de passage)
Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a:

$$f(e_1) = (2, 1, 1) = 2 \times e_1 + 1 \times e_2 + 1 \times e_3,$$

donc les éléments de la première colonne sont $2, 1$ et 1.

$$f(e_2) = (1, 2, 1) = 1 \times e_1 + 2 \times e_2 + 1 \times e_3,$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont $1, 2$ et 1.

$$f(e_3) = (1, 1, 2) = 1 \times e_1 + 1 \times e_2 + 2 \times e_3,$$

donc les éléments de la troisième colonne sont $1, 1$ et 2.
Alors, la matrice associée à l'application f dans la base B est:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On considère une nouvelle base $B^{'}$ de $\mathbb{R}^3$

$$B^{'} = \{u_1(1,-1,0), u_2(1,0,-1), u_3(1,1,1)\}$$

Montrer que $B^{'}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a:

$$card\left(B^{'}\right) = \dim \mathbb{R}^3,$$

alors, il suffit de vérifier que $B^{'}$ est libre ou génératrice.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Alors $B^{'}$ est libre.
On peut utiliser le déterminant. Comme

$$\det(u_1 u_2 u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Alors, $B^{'}$ est libre.
Donc, la famille $B^{'}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice de passage P de B à $B^{'}$ et calculer P^{-1} .
On a:

$$u_1 = (1,-1,0) = 1 \times e_1 + (-1) \times e_2 + 0 \times e_3$$

$$u_2 = (1,0,-1) = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1) \times e_3$$

$$u_3 = (1,1,1) = 1 \times e_1 + 1 \times e_2 + 1 \times e_3$$

Donc,

$$P = M_{B',B}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^{-1}

On a:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^{t}C.$$

On calcule le déterminant

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$= (-1)^{1+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ on développe suivant la première colonne}$$

$$= 3.$$

On calcule les cofacteurs

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Alors, la matrice C est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode:

$$P^{-1} = M_{B,B'}(Id).$$

On a:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 3e_1 \Leftrightarrow e_1 = \tfrac{1}{3}u_1 + \tfrac{1}{3}u_2 + \tfrac{1}{3}u_3.$$

et

$$u_2 + u_3 = 2e_1 + e_2 \Leftrightarrow e_2 = u_2 + u_3 - 2e_1$$

$$\Leftrightarrow e_2 = u_2 + u_3 - 2\left(\tfrac{1}{3}u_1 + \tfrac{1}{3}u_2 + \tfrac{1}{3}u_3\right)$$

$$\Leftrightarrow e_2 = -\tfrac{2}{3}u_1 + \tfrac{1}{3}u_2 + \tfrac{1}{3}u_3$$

et

$$u_2 = e_1 - e_3 \Leftrightarrow e_3 = -u_2 + e_1$$

$$\Leftrightarrow e_3 = -u_2 + \tfrac{1}{3}u_1 + \tfrac{1}{3}u_2 + \tfrac{1}{3}u_3$$

$$\Leftrightarrow e_3 = \tfrac{1}{3}u_1 - \tfrac{2}{3}u_2 + \tfrac{1}{3}u_3$$

Donc,

$$P^{-1} = M_{B,B'}(Id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ecrire la matrice associée à f dans la base $B^{'}$.

On a:

$$M_{B'}(f) = P^{-1} \times M_B(f) \times P$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode

On a:

$$f(u_1) = (1, -1, 0) = 1 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times u_3,$$

donc les éléments de la première colonne sont $2, 0$ et 0.

$$f(u_2) = (1, 0, -1) = 0 \times u_1 + 1 \times u_2 + 0 \times u_3,$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont $0, 1$ et 0.

$$f(u_3) = (4, 4, 4) = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 4 \times u_3,$$

donc les éléments de la troisième colonne sont $0, 0$ et 3.
Alors, la matrice associée à l'application f dans la base $B^{'}$ est:

$$M_{B'}\left(f\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Système d'équations)
Soit le système

$$(S) = \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Ecrire le système précédent sous la forme matricielle $AX = B$ et trouver l'inverse de A. En déduire la solution du système donné.
La forme matricielle de (S_2) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

L'inverse de A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système donné

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 9
Déterminer le rang des systèmes suivants et les résoudre.
1.

$$(S_1) = \begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - y = b \end{cases}$$

La forme matricielle de (S_1) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{B}$$

On a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

On a $\det A \neq 0$, alors

$$rg\,(S_1) = rg\,(A) = 2.$$

Comme $\det A \neq 0$, alors le système (S_1) admet une seule solution, on utilise la méthode de Cramer.
La solution du système est donnée par

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de A par le second membre B.
Alors, on trouve

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

et

$$\det A_1 = -a - b, \det A_2 = 2a - 3b\ .$$

La solution est alors

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{a+b}{5}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2a+3b}{5}$$

2.

$$(S_2) = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 7 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

La forme matricielle de (S_2) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

On a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad \text{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{On développe suivant la première ligne}$$

$$= (-1)^{1+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

On a $\det A \neq 0$, alors

$$rg\,(S_2) = rg\,(A) = 3.$$

Comme $\det A \neq 0$, alors le système (S_2) admet une seule solution, on utilise la méthode de Cramer.
La solution du système est donnée par

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de A par le second membre B.
Alors, on trouve

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A_1 = 9, \det A_2 = 18 \quad , \quad \det A_3 = -9.$$

La solution est alors

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -1$$

3.

$$(S_3) = \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

La forme matricielle de (S_3) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

(S_3) est appelé système homogène.
On a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

alors,

$$rg\,(S_3) = rg\,(A) \leq 2.$$

On choisit la sous matrice carrée d'ordre 2 suivante

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

on a:

$$\det A^{'} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

alors,

$$rg\,(S_3) = rg\left(A^{'}\right) = 2.$$

On choisit le sous système suivant:

$$\left(S_3^{'}\right) = \begin{cases} 2x - 3z = y \\ \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

La forme matricielle de $\left(S_3^{'}\right)$ est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}_{B'}$$

Comme $\det A^{'} \neq 0$, alors le système $\left(S_3^{'}\right)$ admet une seule solution, on utilise la méthode de Cramer.
La solution du système est donnée par

$$x_j = \frac{\det\left(A_j^{'}\right)}{\det\left(A^{'}\right)},$$

où $A_j^{'}$ est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de $A^{'}$ par le second membre $B^{'}$.

Alors, on trouve

$$A_1' = \begin{pmatrix} y & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2' = \begin{pmatrix} 2 & y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution est alors

$$x = \frac{\det\left(A_1'\right)}{\det\left(A'\right)} = 2y$$

$$z = \frac{\det\left(A_2'\right)}{\det\left(A'\right)} = y$$

On remplace x et z dans la 3ème équation

$$2x - 3y - z = 2\,(2y) - 3y - y = 0,$$

Alors, le système (S_3) admet une infinité de solutions

$$X = (2y, y, y) \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}.$$