Description de la cinématique d'un milieu continu

A la différence de la mécanique des solides indéformables, la mécanique des milieux continus permet de prendre en compte les déformations d'un corps et les variations de température qui accompagnent ces déformations. Dans un solide indéformable, la distance entre deux points quelconques ne peut varier avec le temps alors que dans un milieu déformable, cette distance peut évoluer. La cinématique du milieu continu a pour but d'introduire les outils mathématiques pour décrire une cinématique quelconque et ce indépendamment des forces qui l'engendrent.

0.1 Trajectoire et dérivées temporelles

Considérons un milieu continu occupant un volume V à l'instant initial ($t = 0$), par exemple une balle en caoutchouc avant son écrasement dans la paume d'une main . Cette balle peut être vue comme l'assemblage d'une infinité de petits éléments de matière appelés "**points matériels**". Chaque point matériel va se déplacer et avoir sa propre trajectoire. Cette trajectoire est définie par l'évolution de la position $\underline{x}$ de ce point matériel en fonction du temps.

Afin de distinguer deux points matériels, il faut donner un nom unique à chaque point. Généralement, on donne comme nom à chaque point matériel ses coordonnées initiales notées $\underline{X}$. Ces coordonnées dites matérielles sont constantes dans le temps, c'est donc une information intrinsèque de la particule. Par contre, les coordonnées spatiales de la particule,$\underline{x}$, évoluent dans le temps :

$$\underline{x} = \phi(\underline{X}, t) \qquad \phi \quad \text{bijective} \qquad \underline{X} = \phi^{-1}(\underline{x}, t) \tag{0.1}$$

$(\underline{x}, t)$ dit variables d'Euler et le couple $(\underline{X}, t)$ dit variables de Lagrange.

Exemple 0.1 *A titre d'exemple considérons un domaine 2D qui se déforme selon un parallélogramme. Les configurations de référence et à l'instant $t = 1$ sont présentées par la figure (0.1). La transformation, $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$ est donné par*

$$\begin{cases} x_1 = (1/4)(18t + 4X_1 + 6tX_2), \\ x_2 = (1/4)(14t + (4 + 2t)X_2), \end{cases} \tag{0.2}$$

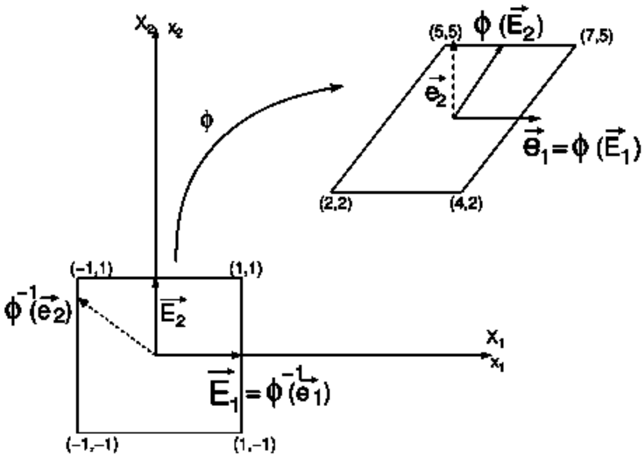

Figure 1 – déformation d'un carré

Une fois la transformation du milieu continu ϕ définie, il est facile de définir les notions de

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad \text{déplacement} \tag{0.3}$$

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}\underline{u}(\underline{X}, t) \quad \text{vitesse} \tag{0.4}$$

$$\underline{a}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}\underline{v}(\underline{X}, t) \quad \text{accélération} \tag{0.5}$$

La dérivée eulérienne est notée $\frac{\partial}{\partial t}$ pour ne pas la confondre avec la dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$.
On définit la dérivée temporelle matérielle ou dérivée temporelle particulaire ou encore dérivée temporelle en suivant le mouvement par

$$\frac{Dg(\underline{x}(\underline{X}, t), t)}{Dt} = \underbrace{\frac{dg(\underline{x}(\underline{X}, t), t)}{dt}}_{\text{dér lagrangienne}} = \frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial t}}_{\text{dér eulerienne}} + \underbrace{\nabla g \cdot \underline{v}}_{\text{terme d'advection}} \tag{0.6}$$

Le dernier terme est une dérivée dite convective. Afin d'illustrer le calcul des dérivées lagrangiennes et eulériennes, on peut considérer l'extension d'une barre unidimensionnelle dont la température évolue avec le temps :

Exemple 0.2 *Mouvement uni-axial, illustration des dérivées temporelles eulérienne et lagrangienne.*
On considère la transformation d'une barre, de longueur initiale 2, donnée par $x = (1+t)X$. Cette barre est soumise à une élévation de température donnée par $T = Xt^2$.
Donner les dérivées matérielles et temporelle puis retrouver la formule (0.6).

0.2 Gradient de la transformation

Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on obsèrve **son déplacement** $\underline{u}(\underline{X}, t)$ ou vecteur déplacement défini par

$$\underline{x}(t) = \phi(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t) \tag{0.7}$$

Une quantité clef dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la trans- formation noté $\underset{\sim}{F}$. Ce tenseur d'ordre 2 permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'ingrédient de base pour définir la déformation d'un corps. Nous définissons le tenseur gradient de la transformation par

$$\underline{d\,x} = \underset{\sim}{F}\underline{d\,X} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{F}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \tag{0.8}$$