USTO MB- Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique
Rattrapage-Matière: Algèbre II - 04/06/2024 - Durée : 1h30mn

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1:

1. Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Rappeler la définition d'une famille génératrice $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E.
2. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.
3. Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Donner la définition de $F+G$ et montrer que $F+G$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 2:

Soit f l'application définie par:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 3x + y + z, y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Déterminer le noyau de f, en donner une base et calculer le rang de f.
3. f est-elle injective? surjective? Justifier votre réponse.
4. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

Exercice 3:

1. Soient A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$$

Déterminer $x, y \in \mathbb{R}$ pour que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculer A^2
b. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
c. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4:

En utilisant la méthode de Cramer résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Corrigé Rattrapage -Algèbre 2
2023-2024

Exercice 1: **(05 points)**
1. Soit E un $\Bbbk-$espace vectoriel.
Rappeler la définition d'une famille génératrice $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E :
La famille $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est génératrice de E ssi tout vecteur X de E est une combinaison linéaire de vecteurs de B.

$$\forall X \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \Bbbk : X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \textbf{(01)}$$

2. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.
La dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments de la base de cet espace vectoriel.

$$\dim E = card\,(B)\,, \qquad \textbf{(01)}$$

où E un $\Bbbk-$espace vectoriel et B est une base de E.
3. Soit E un $\Bbbk-$espace vectoriel. Soient F et G deux s.e.v de E.
Donner la définition de $F + G$:

$$F + G = \{X + Y / X \in F, Y \in G\} \qquad \textbf{(01)}$$

Montrer que $F + G$ est un sous espace vectoriel de E:
On a:
(i). $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$
(ii). Soient $u, v \in F + G$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk$. On a:

$$u, v \in F + G \Rightarrow u = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad v = v_1 + v_2,\ u_1, v_1 \in F, u_2, v_2 \in G$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta v = \alpha\,(u_1 + u_2) + \beta\,(v_1 + v_2) \qquad \textbf{(02)}$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) \in F + G.$$

De (i) et (ii) on déduit que $F + G$ est un sous espace vectoriel de E.
Exercice 2: **(05 points)**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f\,(x, y, z) = (x + y + z, 3x + y + z, y + z)$
1. Montrer que f est une application linéaire
Soient $u = (x, y, z)\,, v = \left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a:

$$f\,(\alpha u + \beta v) = f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \qquad \textbf{(01)}$$

$$= \left(\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', 3\alpha x + 3\beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z'\right)$$

$$= (\alpha x + \alpha y + \alpha z, 3\alpha x + \alpha y + \alpha z, \alpha y + \alpha z) + \left(\beta x' + \beta y' + \beta z', 3\beta x' + \beta y' + \beta z', \beta y' + \beta z'\right)$$

$$= \alpha f\,(u) + \beta f\,(v)$$

Donc, f est une application linéaire.

2. Déterminer $\ker f$, **en donner une base et calculer le rang de** f**.**

Par définition on a:

$$\ker f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

Résolvons l'équation vectorielle $f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

Donc,

$$u = (0,-z,z) = z\underbrace{(0,-1,1)}_{u_1}.$$

(01)

Alors, $\ker f$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_1 = (0,-1,1)$.

$$\ker f = vect\,(u_1\,(0,-1,1)).$$

La famille $B_1 = \{u_1\}$ est génératrice de $\ker f$ et comme elle est libre (car $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$), alors elle forme une base de $\ker f$. **(01)**

Alors, $\dim \ker f = 1$. D'après le théorème du rang

$$rg\,(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 2. \quad \textbf{(0.5)}$$

3. f **est-elle injective? surjective?**

On a: $\dim \ker f \neq 0$, donc f n'est pas injective et $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective. **(0.5)**

4. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$? **(0.5)**

On a: $B_1 = \{u_1\}$ est une base de $\ker f$ et comme $\dim \operatorname{Im} f = 2$, alors on peut choisir la famille $B_2 = \{v_1 = f(e_1) = (1,3,0), v_2 = f(e_2) = (1,1,1)\}$ comme base de $\operatorname{Im} f$.

Donc,

(i).

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3.$$

(ii). La famille $B = \{u_1\,(0,-1,1), v_1 = (1,3,0), v_2 = (1,1,1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5)**

De (i) et (ii) on déduit que

$$\operatorname{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 3: **(05 points)**

1. Soient A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels x, y :

$$2A-4B=\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-5 \\ \\ 4x-12y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} & \textbf{(0.5)} \\ \\ y=\frac{3}{2} & \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

2. Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculer A^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(01.5)}$$

b. Déterminer les réels α et β:

$$A^2+\alpha A+\beta I_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3+\alpha+\beta & 8+2\alpha \\ -8-2\alpha & 5+3\alpha+\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+\alpha+\beta=0 \\ 8+2\alpha=0 \\ 5+3\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-4 & \textbf{(0.5)} \\ \\ \beta=7 & \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

c. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
On a:

$$A^2-4A+7I_2=(0) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{7}(4I_2-A)\right]A=A\left[\frac{1}{7}(4I_2-A)\right]=I_2$$

Alors, il existe $B=\frac{1}{7}(4I_2-A)$ tel que $AB=BA=I_2$, donc A est inversible.
$\left(\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0\right)$ **(0.5)**

$$A^{-1}=\frac{1}{7}(4I_2-A)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(01)}$$

Exercice 4: **(05 points)**
En utilisant la méthode de Cramer résoudre le système linéaire suivant:

$$(S):\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$$

La forme matricielle de (S) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \textbf{(01)}$$

On a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 18. \qquad \textbf{(01)}$$

Comme $\det A \neq 0$, alors le système (S) admet une seule solution. D'après la méthode de Cramer, on trouve:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de A par le second membre B.
La solution est alors:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}, \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

(01) **(01)**

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

(01)