Notions d'inertie:

Inertie totale

$$\boldsymbol{I_{tot}} = \sum \boldsymbol{P_i d^2(x_i, g)}$$

- **Inertie des classes (Intra-classes)**

$$C_1 : I_{c_1} = \sum_{x_i \epsilon C_1} P_i d^2(x_i, g_1)$$

$$C_2 : I_{c_2} = \sum_{x_i \epsilon C_2} P_i d^2(x_i, g_2)$$

.

.

$$C_k : I_{c_k} = \sum_{x_i \epsilon C_k} P_i d^2(x_i, g_k) \quad (k \text{ le nombre de classes})$$

$$I_{intra} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \epsilon c_i} p_x d^2(x, g_i)$$

- **Inertie Inter-classes :**

$$\boldsymbol{I_{inter}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{P_{C_i} d^2(g_i, g)}$$

g_i: $Centre\ de\ gravite\ de\ C_i$

$$I_{tot} = I_{intra} + I_{inter}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i d^2(x_i, g) = \sum_{i=1}^{k} P_{C_i} d^2(g_i, g) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \epsilon c_i} p_x d^2(x, g_i)$$

Lors de la classification on se base sur la minimisation de l'inertie intra-classes ou la maximisation de l'inertie inter-classe. Ces mêmes critères peuvent nous permettre de comparer entre deux partitions au même nombre de classes. En effet, la partition dont l'inertie intra-classes est minimale (ou l'inertie inter-classes est maximale) est meilleure.

Exemple :

	X	Y
I_1	1	1
I_2	1	2
I_3	4	1
I_4	1	4
I_5	5	1
I_6	2	4

K=3

$\boldsymbol{P_1} = \{\{\boldsymbol{I_1}, \boldsymbol{I_2}\}, \{\boldsymbol{I_3}, \boldsymbol{I_4}\}, \{\boldsymbol{I_5}, \boldsymbol{I_6}\}\}$

$\boldsymbol{P_2} = \{\{\boldsymbol{I_1}, \boldsymbol{I_2}\}, \{\boldsymbol{I_3}, \boldsymbol{I_5}\}, \{\boldsymbol{I_4}, \boldsymbol{I_6}\}\}$

On veut déterminer la meilleure partition

Comparaison en utilisant l'inertie-Intra :

$\boldsymbol{I_{intra}(P_1)}$:

$I_{intra}(C_1) = P_{I_1} d^2(I_1, g_1) + P_{I_2} d^2(I_2, g_1)$

$g = \begin{pmatrix} \frac{14}{6} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$I_{intra}(C_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$I_{intra}(C_2) = d^2(I_3, g_2) + d^2(I_4, g_2) = (4 - 5/2)^2 + (1 - 5/2)^2 + (1 - 5/2)^2 + (4 - 5/2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = 9$

$I_{intra}(C_3) = (5 - 7/2)^2 + (1 - 5/2)^2 + (2 - 7/2)^2 + (4 - 5/2)^2 = 9$

$\boldsymbol{I_{intra}(P_1) = \frac{1}{2} + 9 + 9 = 18.5}$

$\boldsymbol{I_{intra}(P_2)}$:

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

$I_{intra}(C_1) = \frac{1}{2}$

$I_{intra}(C_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$I_{intra}(C_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{I_{intra}(P_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5}$

$\boldsymbol{I_{intra}(P_2) < I_{intra}(P_1)}$**,** donc P_2 *est meilleure que* P_1

Comparaison en utilisant l'inertie-Inter :

$$\boldsymbol{I_{inter}(P_1) = 2\left[\left(1 - \frac{14}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{13}{6}\right)^2\right] + 2\left[\left(\frac{5}{2} - \frac{14}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{13}{6}\right)^2\right] + 2\left[\left(\frac{7}{2} - \frac{14}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{13}{6}\right)^2\right] = 7.5}$$

$$\boldsymbol{I_{inter}(P_2) = 2\left[\frac{80}{36}+\left(\frac{9}{2}-\frac{14}{6}\right)^2+\left(1-\frac{13}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{14}{6}\right)^2+\left(4-\frac{13}{6}\right)^2\right] = 24.66}$$

$\boldsymbol{I_{inter}(P_2) > I_{inter}(P_1)}$

Donc la partition $\boldsymbol{P_2}$ est meilleure que $\boldsymbol{P_1}$

$I_{tot} = Iinter(P_1) + Iintra(P_1) = 18.5 + 7.5 = 26 \approx Iinter(P_2) + Iintra(P_2) = 24.66+1.5=26.16$

Calcul de l'inertie totale sans passer par les partitions :

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^{n} d^2(I_i, g) = 26.167$$

- **Inertie totale d'une classification hiérarchique :**

$$I_{tot} = \sum_{n \epsilon H} f(n)$$

Remarque :

Dans le critère de la minimisation de l'inertie intra-classe de la réunion de deux classes :

- Les indices de niveaux correspondent aux inerties intra-classe.
- L'indice de niveau du dernier sommet correspond a l'inertie totale du nuage.
- Une bonne CHA minimise l'inertie totale.

- **L'excentricité des classes :**

L'excentricité de la classe C est notée φ_c

$$\varphi_c = d^2(g_c, g) = \sum_{j=1}^{p}(g_c^j - g^j)^2$$

g_c: Centre de gravité de la classe C. g : Le centre de gravité du nuage. Le petit j est un indice est non pas une puissance

- **Contribution relative de l'axe 's' a l'excentricité de la classe C :**

$$cont_{s_{\varphi_c}} = \frac{(g_c^s - g^s)^2}{\varphi_c}$$