الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Formules autorisées à conserver sans ratures

Système à un degré de liberté libre

Equation de mouvement

$\boldsymbol{m}\ddot{x} + \boldsymbol{c}\dot{x} + \boldsymbol{k}x = 0 \quad \Longrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

avec $\omega_n = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$: pulsation propre ; $\xi = \frac{\boldsymbol{c}}{c_c} = \frac{\boldsymbol{c}}{2\sqrt{\boldsymbol{km}}} = 2\boldsymbol{m}\omega_n$: facteur d'amortissement

1er cas : *système sous amorti* ($\xi < 1 \quad ou \quad c < c_c$).

La solution est donnée par $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\}$

Avec ω_d pulsation de vibration amortie ou pseudo-pulsation $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{n} ln\frac{x_0}{x_n}$; $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Longrightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$.

2er cas : *amortissement critique* ($\xi = 1 \quad ou \quad c = c_c$).

La solution est donnée par $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$

3er cas : *système sur amorti* ($\xi > 1 \quad ou \quad c > c_c \quad ou$).

La solution peut être écrite sous la forme : $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \,\mathrm{ch}\,\omega^* t + A_2 \,\mathrm{sh}\,\omega^* t\}$ avec $\omega^* = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Système à un degré de liberté Forcé

L'équation de mouvement d'un système avec amortissement visqueux sous critique

$\boldsymbol{m}\ddot{x} + \boldsymbol{c}\dot{x} + \boldsymbol{k}x = F_0 \cos\omega t \quad (\omega \equiv \Omega$ pulsation forcée)

La solution complète est donnée par $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x_h(t)$ (solution homogène ou libre, selon le cas, voir système libre)

$x_p(t) = X\, cos(\omega t - \alpha)$ (solution particulière ou permanente)

Avec $X = \frac{F_0}{\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}\omega^2)^2+(\boldsymbol{c}\omega)^2}} = \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$ (amplitude forcée) ;

$r = \frac{\omega}{\omega_n}$ (rapport des fréquences) ;

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{c}\omega}{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$ (angle de phase) ;

et $X_0 = F_0/\boldsymbol{k}$ allongement sous la force statique F_0;

Facteur d'amplification dynamique

$|\bar{H}(\omega)| = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2]^{1/2}}$ et $\tan\alpha = \frac{2\xi r}{1-r^2}$

Mouvement de Base et transmissibilité

$\frac{X}{Z} = \frac{|\bar{X}|}{Z} = \frac{[1+(2\xi r)^2]^{1/2}}{[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2]^{1/2}}$; $TR \equiv \frac{|\bar{f}_{tr}|}{F_0} = \frac{[1+(2\xi r)^2]^{1/2}}{[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2]^{1/2}}$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots$$

T L'énergie cinétique ; V l'énergie potentielle ; D la fonction de dissipation ;
Q_i la force généralisée ; q_i coordonnée généralisée.