Les Systèmes d'Équations Linéaires

I. Introduction

Les systèmes d'équations linéaires sont un outil fondamental en algèbre linéaire et trouvent de nombreuses applications dans divers domaines, notamment en sciences des données. Un système linéaire se présente sous la forme matricielle suivante :

$Ax = b$

où :

- A est une matrice de coefficients
- x est un vecteur d'inconnues
- b est un vecteur de termes constants

II. Méthodes de Résolution

- **Le Pivot de Gauss** : Un Outil Essentiel pour Résoudre les Systèmes Linéaires

Qu'est-ce que le Pivot de Gauss ?

Le pivot de Gauss, également connu sous le nom d'élimination de Gauss, est une méthode algorithmique fondamentale en algèbre linéaire. Elle permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires, de déterminer le rang d'une matrice, et de calculer l'inverse d'une matrice inversible.

L'objectif principal est de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) mais sous une forme échelonnée, ce qui facilite grandement la résolution.

L'algorithme consiste à appliquer des opérations sur les lignes de manière systématique pour obtenir une matrice échelonnée réduite. ***Un pivot est l'élément non nul utilisé pour éliminer les coefficients en dessous de lui dans une colonne.***

Exemple

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$x + 2y + z = 3$

$2x + y - z = 1$

$3x + y + 2z = 4$

On peut représenter ce système sous forme matricielle augmentée :

| 1 2 1 | 3 |

| 2 1 -1 | 1 |

| 3 1 2 | 4 |

Les étapes de l'algorithme de Gauss sont les suivantes :

1. Choisir un pivot: On choisit le premier élément non nul de la première colonne (ici, c'est le 1).
2. Éliminer les éléments en dessous du pivot: On soustrait 2 fois la première ligne à la deuxième ligne, puis 3 fois la première ligne à la troisième ligne.

3. Passer à la ligne suivante et à la colonne suivante: On répète les étapes 1 et 2 en considérant la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne.

Après plusieurs itérations, on obtient une matrice échelonnée réduite de la forme :

| 1 0 0 | 1 |

| 0 1 0 | -1 |

| 0 0 1 | 2 |

Ce qui correspond au système :

x = 1

y =-1

z = 2

- **La Méthode de Gauss-Jordan :**

La méthode de Gauss-Jordan, ou élimination de Gauss-Jordan, est un algorithme fondamental en algèbre linéaire qui permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires. Elle est basée sur des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice pour transformer un système d'équations en une forme plus simple, appelée forme échelonnée réduite.

L'objectif est d'obtenir une matrice où :

  - Le premier élément non nul de chaque ligne (le pivot) est strictement à droite du premier élément non nul de la ligne précédente.
  - *Tous les éléments situés au-dessus et en dessous d'un pivot sont nuls.*
  - Les lignes nulles (si elles existent) sont en bas de la matrice.

Applications de la méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est un outil fondamental utilisé dans de nombreux domaines :

- Algèbre linéaire: Résolution de systèmes, calcul de déterminants, etc.
- Statistiques: Régression linéaire, analyse en composantes principales.
- Informatique: Résolution de systèmes d'équations linéaires issus de la modélisation de phénomènes physiques.
- Ingénierie: Analyse structurelle, résolution d'équations différentielles.

- **La Décomposition LU :**

La décomposition LU est une technique d'algèbre linéaire qui consiste à factoriser une matrice carrée A en un produit de deux matrices :

- L : Une matrice triangulaire inférieure (Lower en anglais) avec des 1 sur la diagonale.
- U : Une matrice triangulaire supérieure (Upper en anglais).

Ainsi, on peut écrire : A = LU.

Pourquoi utiliser la décomposition LU ?

- Résolution de systèmes linéaires: Une fois la décomposition LU effectuée, résoudre un système linéaire Ax = b revient à résoudre deux systèmes triangulaires successifs : Ly = b (substitution avant) puis Ux = y (substitution arrière). Ces systèmes triangulaires sont beaucoup plus faciles à résoudre que le système initial.
- Calcul de déterminants: Le déterminant de A est égal au produit des éléments diagonaux de U.
- Calcul de l'inverse d'une matrice: On peut utiliser la décomposition LU pour calculer l'inverse d'une matrice.

La décomposition LU est étroitement liée à l'élimination de Gauss. En effet, les opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'une matrice lors de l'élimination de Gauss peuvent être interprétées comme une factorisation LU.

Il existe plusieurs algorithmes pour calculer la décomposition LU, mais l'idée générale est de transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure U en éliminant les éléments en dessous de la diagonale. Les facteurs utilisés pour effectuer ces éliminations sont stockés dans la matrice L.

Exemple

Considérons la matrice :

A = | 2 1 |

| 4 5 |

On peut trouver la décomposition LU suivante :

L = | 1 0 |

| 2 1 |

U = | 2 1 |

| 0 3 |

Ainsi, A = LU.

Applications de la décomposition LU

La décomposition LU est largement utilisée en :

- Analyse numérique: Résolution de systèmes d'équations différentielles, éléments finis, etc.
- Statistiques: Régression linéaire, analyse en composantes principales.
- Optimisation: Méthodes de descente de gradient.
- Informatique graphique: Simulations physiques, rendu d'images.

Avantages de la décomposition LU

- Efficacité: Une fois la décomposition LU effectuée, la résolution de plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice A mais des seconds membres différents est très rapide.
- Stabilité numérique: La décomposition LU peut être plus stable numériquement que d'autres méthodes pour certaines matrices.

La décomposition LU est une technique puissante et versatile en algèbre linéaire. Elle permet de résoudre efficacement des systèmes d'équations linéaires et est à la base de nombreux algorithmes numériques.