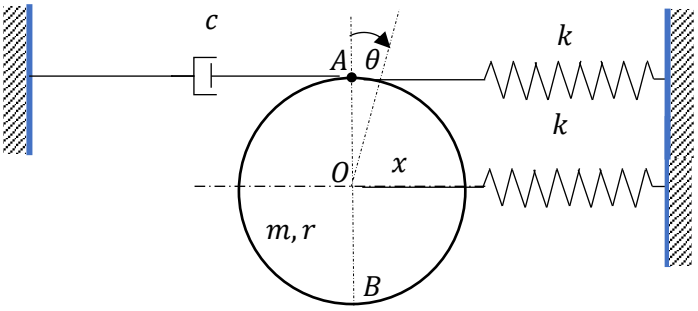
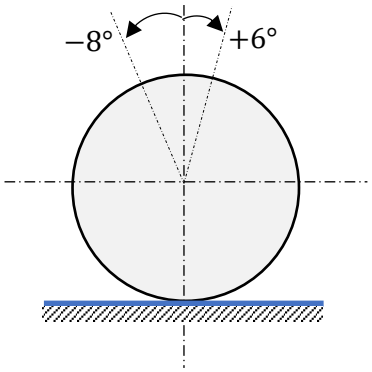
Exercice 1 (10 pts)

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, roule sans glissement $(x = r\theta)$.

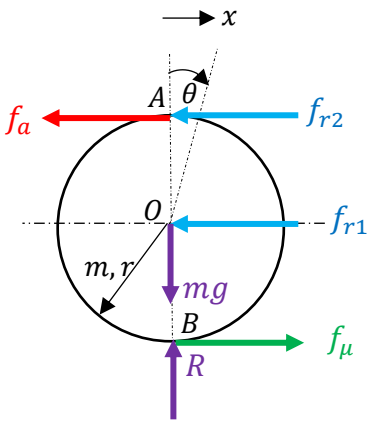
1. Tracez le diagramme des forces du corps libre.
2. Déterminez l'équation de mouvement du système par la méthode de Newton.
3. Déterminez la pulsation propre et le facteur d'amortissement.
4. On écarte le disque d'un angle initial de -8° sans vitesse initiale. Au bout de 0,1 s, sa vitesse s'annule pour la première fois et il atteint un angle de 6°. Déterminez le facteur d'amortissement, la pseudo-période et la pulsation naturelle.





Solution :

1. **Tracez le diagramme des forces du corps libre.**



(1 pt)

Forces de rappel

$f_{r1} = kx_O = kx$

$f_{r2} = kx_A = 2kx \qquad (x_A = 2x)$

Force d'amortissement

$f_a = cv_A = 2c\dot{x} \qquad (v_A = \dot{x}_A = 2\dot{x})$

Force d'adhérence

f_μ

2. **Déterminez l'équation de mouvement du système par la méthode de Newton.**

Méthode I.

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque ($\sum F = ma_x$ et $\sum \mathcal{M}_{/G} = I_G\ddot{\theta}$).

$$\sum F = ma_x$$

$$(f_\mu - f_{r1} - f_{r2} - f_a) = ma_x$$

$$f_\mu - kx - 2kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 3kx - f_\mu = 0 \qquad \text{(1 pt)}$$

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = I_O\ddot{\theta}$$

$$-f_\mu r - f_{r2} r - f_a r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$-f_\mu r - 2kxr - 2c\dot{x}r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \qquad \text{(1 pt)}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$\begin{cases} -f_\mu = 2kx + 2c\dot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x} & \text{avec} \quad (r\ddot{\theta} = m\ddot{x}) \\ m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 3kx - f_\mu = 0 \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 3kx + 2kx + 2c\dot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + 5kx = 0}. \qquad \text{(1 pt)}$$

Méthode II.

En utilisant les équilibres dynamiques autour du centre instantané de rotation du disque

$(\sum \mathcal{M}_{/B} = I_B\ddot{\theta})$.

$$-f_{r1} \times r - f_{r2} \times 2r - f_a \times 2r = I_B\ddot{\theta} \qquad \text{(1 pt)}$$

$$I_B = I_G + m\overline{OB}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$$

$$I_B = \frac{3}{2}mr^2 \qquad \text{(1 pt)}$$

$$-kx \times r - 2kx \times 2r - 2c\dot{x} \times 2r = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 4c\dot{x}r + 5kxr = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + 5kx = 0} \qquad \text{(1 pt)} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\frac{3}{2}m\ddot{\theta} + 4c\dot{\theta} + 5k\theta = 0}$$

3. **Déterminez la pulsation propre et le facteur d'amortissement.**

On peut écrire l'équation différentielle sous la forme standard

$$\ddot{x} + \frac{8c}{3m}\dot{x} + \frac{10k}{3m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

avec $\omega_n^2 = \frac{10k}{3m} \Longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{10k}{3m}}$ (1 pt)

et $2\xi\omega_n = \frac{8c}{3m} \Longrightarrow \xi = \frac{8c}{6m}\frac{1}{\omega_n} = \frac{8c}{6m}\sqrt{\frac{3m}{10k}} = \frac{4c}{3}\sqrt{\frac{3}{10km}}$

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}c}{\sqrt{15km}}$$ (1 pt)

4. **On écarte le disque d'un angle initial de -8° sans vitesse initiale. Au bout de 0,1 s, sa vitesse s'annule pour la première fois et il atteint un angle de 6°.**
Déterminez le facteur d'amortissement, la pseudo-période et la pulsation naturelle.

La vitesse d'un mouvement harmonique ou pseudo-harmonique s'annule toutes les demi-périodes
donc $n = \frac{1}{2}$ et $\frac{T_d}{2} = 0{,}1\ s$
Décrément logarithmique
$\delta = \frac{1}{n} ln \frac{x_0}{x_n}$
$\delta = \frac{1}{(\frac{1}{2})} ln \frac{8}{6} = 2ln\frac{4}{3} = 0.57536$ (1 pt)

Le facteur d'amortissement
$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$
$$\xi = \frac{0.57536}{\sqrt{0.57536^2 + 4\pi^2}} = 0{,}09$$ (1 pt)

La pseudo-période
$\frac{T_d}{2} = 0{,}1\ s \Longrightarrow T_d = 0{,}2\ s$ (1 pt)
La pseudo-pulsation
$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi = 31.416\ rad/s$
La pulsation naturelle
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$
$$\omega_n = \frac{10\pi}{\sqrt{1-0.09^2}} = 31.547\ \ rad/s.$$ (1 pt)