# I. ANALYSE COMBINATOIRE

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques où on s'intéresse à l'étude de problèmes de dénombrements d'ensembles finis.

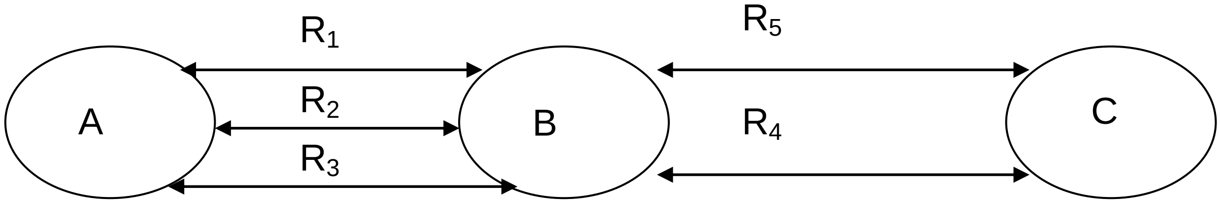
## I.1 PRINCIPE DE L'ADDITION

Si une opération $O_1$ peut être effectuée de $n_1$ manières différentes, une opération $O_2$ peut être effectuée de $n_2$ manières différentes et ainsi de suite jusqu'à une opération $O_k$ qui peut être effectuée de $n_k$ manières différentes.

Alors le nombre de manières différentes d'effectuer **<u>l'une ou l'autre</u>** de ces opérations est

$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

**Exemple :** On se donne le réseau routier suivant reliant trois villes A, B et C.




Pour un individu se trouvant dans la ville B, combien y a-t-il de façons différentes pour quitter cette ville?

Soient les opérations suivantes:

O : « quitter B » , $O_1$ : « quitter B vers A » , $O_2$ : « quitter B vers C »

On a alors : $O \Leftrightarrow O_1 \vee O_2$

Il y a 3 manières pour réaliser $O_1$ et 2 manières pour réaliser $O_2$

Le nombre de manières d'effectuer l'opération O est : $N = 3 + 2 = 5$

## I.2 PRINCIPE DE LA MULTIPLICATION

Soit une première opération $O_1$ qui peut être effectuée de $n_1$ manières différentes. Si pour chacune de ces $n_1$ manières, une deuxième opération $O_2$ peut être effectuée de $n_2$ manières différentes.

Alors **<u>l'ensemble de ces deux opérations</u>** peut être effectué de $N = n_1 \times n_2$ manières différentes.

**Exemple :** Pour le même réseau routier, un individu se trouve dans la ville A et désire aller à la ville C. combien existe-t-il de parcours différents?

Soient les opérations suivantes:

O : « aller de A à C » , $O_1$ : «aller de A à B» , $O_2$ : «aller de B à C »

On a : $O \Leftrightarrow O_1 \wedge O_2$

$n_1 = 3$ manières pour réaliser $O_1$

$n_2 = 2$ manières pour réaliser $O_2$

Le nombre de manières d'effectuer l'opération O est : $N = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$

## I.3 **PRINCIPE DE LA MULTIPLICATION – cas général**

Soit une première opération $O_1$ qui peut être effectuée de $n_1$ manières différentes. Si pour chacune de ces $n_1$ manières, une deuxième opération $O_2$ peut être effectuée de $n_2$ manières différentes. Si pour chacune de ces $n_1 \times n_2$ manières différentes pour effectuer $O_1$ et $O_2$ , une troisième opération $O_3$ peut être effectuée de $n_3$ manières différentes. Et ainsi de suite jusqu'à la k ième opération $O_k$ qui peut être réalisée de $n_k$ manières différentes pour chacune des manières de réaliser les opérations précédentes.

Alors **l'ensemble de ces opérations** peut être effectuer de $N = n_1 \times n_2 \times . . . \times n_k$ manières différentes.

## I.4 NOTION DE FACTORIELLE

Soit $n \in IN^*$. On définit factorielle n, notée n!, par : $n! = n.(n-1)\,(n-2). . . 2.1$

Par convention, on prend : $0!=1$

On a : $n! = n.(n-1)!$

## I.5 ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS et COMBINAISONS

On considère un ensemble E de n éléments (n fini) et soit une suite ( une disposition ) de p éléments choisis parmi les éléments de l'ensemble E.

Cette suite peut être ordonnée ou non selon qu'on tient compte de la position des éléments ou non.

Elle peut se faire avec ou sans répétition selon que l'on puisse utiliser le même élément plusieurs ou une seule fois.

**EXEMPLES**

1. Soit l'ensemble E= {1,3,5}. Écrire toute les dispositions ordonnées et avec répétition de 2 éléments.

   (1,1) ,(1,3), (1,5), (3,1) (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)

2. Soit l'ensemble F= {a,b,c}. Écrire toute les dispositions non ordonnées et sans répétition de 2 éléments.

   (a,b) ,(a,c), (b,c)

## I.5.1 ARRANGEMENTS

- Soit E un ensemble contenant n éléments différents ( n fini ). On appelle arrangement sans

répétition de p éléments ( $0 \leq p \leq n$) toute suite ordonnée de p éléments <u>différents</u> choisis dans E.

Le nombre d'arrangements sans répétition est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Remarque : l'ordre est important.

- Soit E un ensemble contenant n éléments différents ( n fini ). On appelle arrangement avec

répétition de p éléments ( p quelconque ) toute suite ordonnée de p éléments <u>quelconques</u> de E.

Le nombre d'arrangements avec répétition est $\mathscr{A}_n^p = n^p$

**Exemple**

On doit choisir un président et un vice-président dans un groupe de 5 personnes {A,B,C,D,E}. De combien de façons peut-on le faire?

Le président peut être choisi parmi les 5 personnes, il y a donc 5 choix. Une fois le président choisi, il reste 4 personnes pour choisir le vice-président. Donc le nombre d'arrangements possibles est $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \times 4 = 20$

Dans un club de 10 personnes, on veut choisir un comité qui comprend un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul est exclu. De combien de manière peut-on choisir ce comité ?

Puisqu'il y a des charges, chaque comité est un arrangement et comme le cumul est exclu alors se sont des arrangements sans répétition.

On a alors $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ comités possibles

*Donc un arrangement est une suite ordonnée d'objets à partir d'un ensemble. L'ordre dans lequel les objets sont choisis est important.*

### I.5.2 PERMUTATIONS

On appelle permutation toute suite ordonnée des n éléments de l'ensemble E.

Remarque : Une permutation est donc un arrangement particulier où $p = n$

Le nombre de permutations différentes est : $P_n = A_n^n = n!$

**Exemple 1**

Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot DIPLOMES

n = 8 , le nombre de mots différents est : $N = P_8 = 8! = 40\ 320$

**Exemple 2**

De combien de manières peut-on ranger, sur une étagère, 4 livres de maths, 3 livres de physiques et 2 livres de chimie ?

Il y a $N = 9! = 362\ 880$ manières différentes

**Permutations dans le cas où certains éléments de l'ensemble E sont identiques:**

Soient $n_1$ éléments d'une certaine sorte, $n_2$ éléments d'une autre sorte, et ainsi de suite jusqu'à $n_k$ éléments qui sont d'une sorte différente. Alors le nombre de permutations différentes est

$$\mathscr{P}_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot STATISTIQUES

$n = 12$ , $n_1 = 3$ ( 3 S) , $n_2 = 3$ (3T) , $n_3 = 2$ (2I) le nombre de mots différents est $\mathscr{P}_{12}^{3,3,2} = \frac{12!}{3!3!2!} = 6\ 652\ 800$

### I.5.3 COMBINAISONS

- On appelle combinaison sans répétition de p éléments ( $0 \leq p \leq n$) toute suite non ordonnée de p éléments différents choisis parmi les éléments de E.

Le nombre de combinaisons sans répétition est : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

**Propriétés**

$C_n^0 = 1$

$C_n^n = 1$

$C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

**Exemple** : Mr X a 7 amis et il veut en inviter 3 à une fête. Combien de groupes différents de 3 amis peut-il inviter ?

L'ordre dans lequel il invite ses amis n'a pas d'importance (inviter A, puis B puis C est la même chose qu'inviter C, puis A, puis B)

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \times (7-3)! = 35}$$

- On appelle combinaison avec répétition de p éléments (p quelconque) toute disposition non ordonnée de p éléments quelconques pris parmi les éléments de E.

Le nombre de combinaisons avec répétition est : $K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

**<u>En résumé</u>**

- Arrangements : Ordre important, sélection partielle.
- Permutations : Ordre important, sélection de tous les éléments.
- Combinaisons : Ordre sans importance, sélection partielle.

**Exercice**

Un ensemble de n éléments distincts doit être divisés en r groupes de tailles respectives $n_1$, $n_2$ , . . . $n_r$ (où $n = n_1+\ldots+n_r$ ). De combien de manières peut-on le faire ?

Il y a $C_n^{n_1}$ façons de choisir le 1er groupe. Pour chaque choix du 1er groupe, il y a $C_{n-n_1}^{n_2}$choix possibles du 2ème groupe. Pour chaque choix des 1er groupe et 2ème groupe, il y a $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$choix possibles du 3ème groupe et ainsi de suite jusqu'au rième et dernier groupe pour lequel il y a $C_{n-n_1-...-n_{r-1}}^{n_r} = 1$ seul choix possible

En tout, le nombre de façons de choisir les r groupes est :

$$\begin{aligned}
&C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times C_n^{n-n_1-n_2-\ldots\ldots\ldots-n_{r-1}} = \\
&= \frac{n!}{(n-n_1)!\times n_1!} \times \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\times n_2!} \times \ldots \times \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1})!}{0!\times n_r!} \\
&= \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times \ldots n_r!}
\end{aligned}$$

Ce nombre est noté $C_n^{n_1 n_2 \ldots n_r}$ et appelé coefficient multinomial

Les coefficients multinomiaux sont une généralisation des coefficients binomiaux. Ils sont utilisés dans le développement d'une somme de termes élevée à une puissance entière.

$$(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \ldots + \boldsymbol{x_r})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{(\boldsymbol{n_1}+\boldsymbol{n_2}+\ldots+\boldsymbol{n_r})/\boldsymbol{n_1}+\boldsymbol{n_2}+\ldots+\boldsymbol{n_r}=\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C_n^{n_1 \ldots n_r} x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}}$$

La somme est ici faite sur tous les vecteurs à composantes entières non négatives ($n_1$, $n_2$, ..., $n_r$) tels que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Il y a $C_{n+r-1}^{n}$ termes dans la sommes.

**Exemple :** Développer $(x + y + z)^2$

## II. CALCUL DE PROBABILITES

**II.1 Notion d'expériences aléatoires** : une expérience ou épreuve est dite aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat.

L'ensemble de tous les résultats possibles est appelé univers ou ensemble fondamental de l'expérience, il est en général connu. On le note Ω.

**Exemples**

1. On lance une pièce de monnaie. L'univers de cette épreuve aléatoire est:

$\Omega = \{$ pile , face $\}$

2. On lance un dé. $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

3. On lance deux dés. $\Omega = \{ (1,1),(1, 2),. . . , (6, 6) = \{ (i , j)/ i , j \in IN$ et $1 \leq i , j \leq 6\}$

## II.2 Evènements et algèbre des évènements

Les sous-ensembles de $\Omega$ sont appelés les évènements.

$\varnothing$ est appelé évènement impossible.

$\Omega$ est l'évènement certain.

Chaque partie de $\Omega$ contenant un seul élément ( un seul résultat possible) est appelée évènement élémentaire.

**Exemples**

1. On lance une pièce de monnaie. L'univers de cette épreuve aléatoire est: $\Omega = \{$ pile , face $\}$

**2.** On lance un dé. $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

3. On lance deux dés.

$$\Omega = \{ (1,1),(1, 2),. . . , (6, 6) \} = \{ ( i , j ) / i , j \in IN \text{ et } 1 \leq i , j \leq 6\}$$

Soit l'évènement A : « la somme des points obtenus est $>10$ »

$$A = \{ (5,6),(6, 5),(6, 6) \}$$

Soit l'évènement B : « la somme des points obtenus est égale à 1 »

$B = \varnothing$ B est l'évènement impossible (il ne se réalise jamais).

Rq. Un évènement est donc une partie de $\Omega$ définie par une proposition logique.

**Définitions** Soient A et B deux évènements de $\Omega$.

- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement qui est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement qui n'est réalisé que si A et B sont réalisé simultanément.
- Si A est évènement de $\Omega$. L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$ , est l'évènement qui n'est réalisé que si A ne l'est pas.

- Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dira que A et B sont deux évènements incompatibles.

**Propriétés**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## II.3 Notion de probabilité

**Définition** Soit $\Omega$ l'ensemble fondamental associé à une épreuve aléatoire. Une probabilité P définie sur $\Omega$ est une application de l'ensemble de toutes les parties de $\Omega$, $\mathscr{P}(\Omega)$, dans IR vérifiant :

i. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $\forall (A_i) \subset \mathscr{P}(\Omega)$ : $P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$ si les évènements $A_i$ sont deux à deux incompatibles (c.a.d. pour $i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$)

**Conséquences :** si P est une probabilité sur $\Omega$, on a alors :

- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in P(\Omega)$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \in P(\Omega)$ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## II.4 Notion d'équiprobabilité :

l'équiprobabilité correspond au cas où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, c.a.d si $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n \}$ alors $P(\{ \omega_i \}) = 1/n$.

Dans ce cas d'équiprobabilité, si A est un évènement quelconque alors :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

**Exemples:**

- On lance un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier?
- On lance deux dés bien équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10?
- On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir dans la main exactement deux dames ?

## III. Probabilité Conditionnelle - Théorème de Bayes

### III.1 Exemple :

1. On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 52 cartes. On s'intéresse à l'évènement

   A : « la carte tirée est un Valet ».

Calculer la probabilité de A.

On a $P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{C_4^1}{C_{52}^1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0.077$

2. Après avoir tiré la carte, on a vu du coin de l'œil, que la carte tirée était une figure noire.

Etant donnée cette information, recalculer la probabilité de A.

Cette information change la probabilité de A car il ne reste que deux valets noirs comme résultats favorables à A et ils constituent 2 des 6 résultats possibles ( les 6 figures noires). La probabilité cherchée devient alors $\frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$

En effet, si on appelle B l'évènement « la carte tirée est une figure noire », on a alors

P(B)= $= \frac{C_6^1}{C_{52}^1} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

Lorsque B est réalisé, cet évènement devient l'ensemble des résultats possibles c.a.d. le nouveau ensemble fondamental et la probabilité que A se réalise est : $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{6}{52}} = \frac{1}{3}$

### III.2 Probabilité conditionnelle

**Définition** Si A est un évènement associé à une épreuve aléatoire et si B est un évènement de probabilité non nulle associé à la même épreuve, on définit alors la probabilité conditionnelle que A se réalise étant donné que B est réalisé, notée P(A/B), par :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

De cette définition, on en déduit que : $P(A\cap B) = P(A/B) \times P(B)$

De même, la probabilité conditionnelle que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ où $p(A)\neq 0$

On a aussi : $P(A\cap B) = P(B/A) \times P(A)$

### III.3 Indépendance

On dira que l'évènement A est indépendant de l'évènement B si et seulement la réalisation de l'événement B n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'événement A. En d'autres termes, la connaissance que B s'est produit (ou ne s'est pas produit) ne modifie pas la probabilité que A se produise.

Mathématiquement, cette définition se traduit par l'égalité des probabilités : $P(A/B) = P(A)$

où $P(A/B)$ représente la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé, et $P(A)$ est la probabilité de A.

Il est important de noter que la relation d'indépendance est symétrique. Si l'événement A est indépendant de l'événement B, alors l'événement B est également indépendant de l'événement A.

En effet :

A indépendant de B $\Leftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B\cap A) = P(B) \times P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)\times P(A)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$$

$\Leftrightarrow$ B est indépendant de A

On dira tout simplement que A et B sont indépendants.

Par conséquent, pour vérifier si deux événements A et B sont indépendants, on peut utiliser l'une ou l'autre des conditions équivalentes suivantes :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$ $\Leftrightarrow$ $P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

En pratique, la condition $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$ est souvent plus simple à utiliser pour déterminer si deux événements sont indépendants, car elle ne nécessite pas le calcul de probabilités conditionnelles.

**Attention** : indépendants $\neq$ incompatibles.

### III.4 Théorèmes de Bayes

**Définition** Soit ($A_i$) une suite d'évènements associés à une épreuve aléatoire. On dira que ($A_i$) forme un système complet d'évènements (SCE) de $\Omega$ si et seulement si on a :

- $\forall i : A_i \neq \emptyset$
- $\forall\, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\Omega = \cup A_i$

**1ère Formule de Bayes** : Soit ($A_i$) un système complet d'évènements de $\Omega$ et soit B un évènement quelconque. On a alors :

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i) \times P(A_i)$$

**2ème Formule de Bayes**: Soient ($A_i$) un système complet d'évènements de $\Omega$ et B un évènement de probabilité non nulle. On a alors

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_i P(B/A_i) \times P(A_i)}$$

**Exemple 1:** Un groupe de personnes est formé de 60% d'hommes et 40% de femmes.

80% des hommes et 70% des femmes fument.

1. Quelle est la proportion des fumeurs dans cette population ?
2. On tire au hasard une personne de ce groupe, elle (la personne) fume. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

1. On tire une personne au hasard de cette population et soient les évènements suivants

$A_1$ « la personne tirée est un homme»

$A_2$ « la personne tirée est une femme»

B « la personne tirée fume »

On cherche P(B)

$\{A_1 , A_2\}$ forme un SCE de $\Omega$

D'après la 1ère formule, $P(B)= P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)$

On a : $P(A_2) = 0.4$ , $P(A_1) = 0.6$ , $P(B/A_2) = 0.7$ , $P(B/A_1) = 0.8$

$P(B)= 0.8 \times 0.6 +0.7 \times 0.4 = 0.76$

76 % de cette population sont des fumeurs.

2. On cherche P($A_1$ /B)

P($A_1$ /B) = $\frac{P(B/A_1).P(A_1)}{P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)} = \frac{0.8 \times 0.6}{0.76} = 0.63$

**Exemple 2** Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes : ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas.

Ses statistiques montrent qu'un individu enclin aux accidents a une probabilité de 0,4 d'en avoir un dans l'espace d'un an; cette probabilité tombe à 0,2 pour les gens à risque modéré. On suppose que 30% de la population appartient à la classe à haut risque.

1. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat?
2. Un nouveau signataire a un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à haut risque?

Soient les événements suivants :

$A_1$ : « le nouvel assuré fait partie de la classe à haut risque »

$A_2$ : « « le nouvel assuré fait partie de la classe à risque modéré »

B : « le nouvel assuré est victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat »

1. On cherche P(B)

   {$A_1$, $A_2$ } est un système complet d'évènements

On a $P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2)$

Et d'après les hypothèses : $P(A_1)= 0.3$ ; $P(A_2)=1 - P(A_1)=0.7$ ; $P(B/A_1)=0.4$ ; $P(B/A_2)=0.2$

$$P(B) = 0.4\times0.3 + 0.2\times0.7 =0.26$$

2. On cherche $P(A_1/B)$

$$P(A_1/B)= \frac{P(B/A_1)\times P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.4 \times 0.3}{0.26} = 0.46$$