USTO - Informatique - IPSD et PST1

TD2 - Analyse Combinatoire

Exercice 1

Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si :

a) chaque lettre est utilisée, au plus, une seule fois,

b) on peut réutiliser les lettres.

a) $A_{26}^{10}=\frac{26!}{(26-10)!}$

b) $\mathscr{A}_{26}^{10} = 26^{10}$

Exercice 2

Combien de nombres de 6 chiffres existe-t-il

a) S'il n'y a aucune restriction ?

b) Si les nombres doivent être divisibles par 5 ?

c) Si les répétitions de chiffres sont exclues ?

a) $9*\mathcal{A}_{10}^{5} = 9*10^5$ (le 1er chiffre est différent de zéro)

b) $9*10^4*2$ (le 1er chiffre est différent de zéro et le dernier est soit 5 soit 0)

c) $9*A_9^5=9*\frac{9!}{4!}$

Exercice 3

Dans un club de 10 personnes, on veut choisir un comité qui comprend un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul est exclu. De combien de manière peut-on choisir ce comité si :

1. aucune condition n'est imposée ?
2. Mr A doit avoir une charge?
3. Mr B n'accepte que la charge de président?
4. Mr C et Mr D n'acceptent pas de siéger ensemble?

1. L'ordre est important puisqu'il y a des charges et il n'y a pas de répétition
   N= $\mathrm{A}_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \; comités \; possibles$

2. $\mathbf{A_3^1 = 3}$ façons de donner une charge à A (A soit président, soit secrétaire soit trésorier). Pour chaque charge donnée à A, on complète le comité par 2 personnes choisies parmi les 9 restantes de $\mathbf{A_9^2}$ manières.
   En tout, il y a $\mathbf{A_3^1}\times \mathbf{A_9^2}$ = 3×9×8

3. 2 cas sont possibles : B est président ou bien il n'est pas dans le comité

   Si B est président on $\mathrm{A}_9^2 = 9 \times 8$ comités

   Si B n'est pas dans le comité on a A_9^3=9×8×7 comités

   En tout on a $\mathrm{A}_9^2 + \mathrm{A}_9^3$

4. 3 cas sont possibles :

C siège et D non ou bien D siège et C non ou bien ni C ni D ne siègent

$\mathrm{A}_3^1 \times \mathrm{A}_8^2 + \mathrm{A}_3^1 \times \mathrm{A}_8^2 + \mathrm{A}_8^3$

Exercice 4

Ahmed va disposer 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de maths, trois de chimie, deux d'histoire et un de langue. Ahmed aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles?

Il y a 4! Permutations possibles entre les spécialités. Pour chaque ordre de présentation des spécialités, les 4 livres de Maths peuvent être permutés entre eux de 4! manières, les 3 livres de chimie de 3! manières et les 2 livres d'histoire de 2! manières.

Donc en tout il y a $4! \times (4! \times 3! \times 2!)$

Exercice 5

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

a) ils peuvent se placer librement ?
b) Les hommes désirent rester groupés ?

a) $P_{25} = 25\,!$
b) $P_{10} \times P_{16} = 10\,! \times 16\,!$

Exercice 6

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ? Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger ensemble au comité ?

$C_5^2 C_7^3$
$C_5^2 C_5^2 + C_5^2 C_5^2 + C_5^3 C_5^2$

Exercice 7

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen;

a) de combien de manières peut-il les choisir?
b) même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions?

$C_{10}^7 = 120$
$C_5^3 C_5^4 + C_5^4 C_5^3 + C_5^5 C_5^2 = 110$

Exercice 8

On forme des nombres avec 5 des chiffres de 1 à 9. Combien de nombres peut-on former si :

1. Aucune condition n'est imposée.
2. Un chiffre apparait plus de deux fois. En déduire le nombre de ceux dont un chiffre apparait moins de trois fois.

1) $N_1 = 9^5 = 59049$
2) $N_2 = C_5^3.9.8^2 + C_5^4.9.8 + 9 = 6129 \Rightarrow N_3 = 59049 - 6129 = 52920$

TD2 - Analyse Combinatoire

Exercice 9

II faut répartir 10 garçons en deux équipes A et B de 5 personnes chacune. L'équipe A sera placée dans une ligue et l'équipe B dans une autre. Combien y a-t-il de répartitions possibles?

Il y a $\frac{10!}{5!.5!} = \frac{10*9*8*7*6}{5*4*3*2*1} = 252$

Exercice 10

Pour disputer un match de basketball, 10 garçons se répartissent en deux équipes de 5. De combien de manières peuvent-ils procéder?

Il y a $\frac{\frac{10!}{5!.5!}}{2!} = 126$

Exercice 11

Un ensemble de n éléments distincts doit être divisés en r groupes de tailles respectives n_1, n_2 , . . . n_r ($n = n_1+\ldots+n_r$). De combien de manières peut-on le faire ?

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times C_n^{n-n_1-n_2-\ldots\ldots\ldots\ldots-n_{r-1}} =$$

$$= \frac{n\,!}{(n-n_1)\,!*n_1!} \times \frac{(n-n_1)\,!}{(n-n_1-n_2)\,!*n_2!} \bullet\bullet\bullet \frac{(n-n_1-n_2-\bullet\bullet\bullet-n_{r-1})\,!}{0\,!*n_r\,!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!*n_2!*\ldots\ldots\ldots n_r\,!} = C_n^{n_1 n_2 \ldots n_r}$$

Exercice 12

En utilisant les coefficient multinomiaux, développer **(x + 2y - z)**^{3}

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{(n_1 \ldots n_r)/\, n_1+\ldots+n_r=n} C_n^{n_1 n_2 \ldots n_r} x^{n_1}\, x^{n_2} \ldots x^{n_r}$$

Où où $C_n^{n_1 n_2 \ldots n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_3!}$. La somme est faite sur tous les vecteurs à composantes entières non négatives (n_1, n_2, ..., n_r) tels que $n_1+ n_2 + \ldots + n_r = n$.

Dans la somme, il y a C_{n+r-1}^{n} termes .

(x + 2y - z)^3 = **(x + Y+Z)**^{3} avec Y=2y et Z=-z ; n=3 et r=3

Il y a $C_{3+3-1}^{3} = C_5^3 = 10$ termes dans la somme

Les solutions de $n_1+ n_2 + n_3 = 3$ sont

(2,1,0) ;(2,0,1) ; (1,2,0) ; (0,2,1) ; (1,0,2) ;(0,1,2) ; (3,0,0) ;(0,3,0) ;(0,0,3) ; (1,1,1)

(x + Y+Z)^3 $= C_3^{2,1,0} x^2 Y^1 Z^0 + C_3^{2,0,1} x^2 Y^0 Z^1 + \ldots$