

Exercice 1

Soient E, F et G trois événements.

Trouver des expressions pour les événements suivants qui sont réalisés lorsque de E, F et G :

1. E seul l'est,
2. E et G le sont mais pas F,
3. au moins l'un des trois l'est,
4. au moins deux d'entre eux le sont,
5. les trois le sont,
6. aucun ne l'est.

1. $E \cap \bar{F} \cap \bar{G}$
2. $E \cap G \cap \bar{F}$
3. $E \cup F \cup G$
4. $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$
5. $E \cap F \cap G$
6. $\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{G} = \overline{E \cup F \cup G}$

Exercice 2

Soient Ω l'ensemble fondamental d'une épreuve aléatoire, P une probabilité sur Ω et A, B et C trois événements quelconques. Démontrer que :

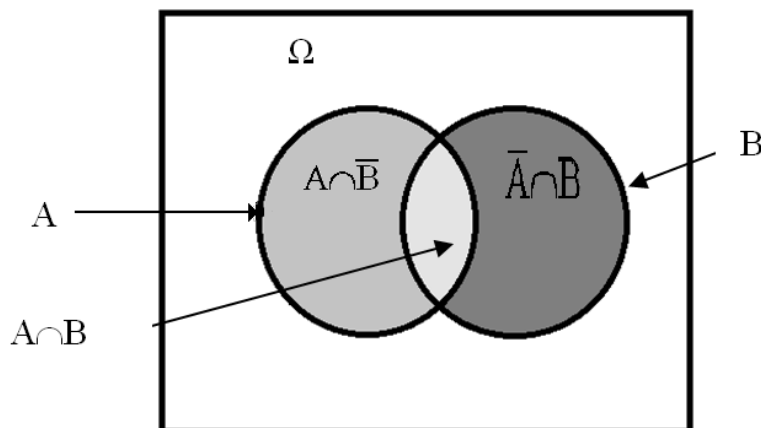
1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
3. Si $(A_i)_{i=1 \dots n}$ est une suite d'événements, démontrer que :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$1) \quad A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (1)$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \quad \text{alors} \quad P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \quad (2)$$

$$\text{Donc} \quad P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) \quad (3)$$



En substituant (3) dans (1) on obtient le résultat.

$$\begin{aligned}
 2. \quad P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(E \cup C) \quad \text{où } E = A \cup B \\
 &= P(E) + P(C) - P(E \cap C) \text{ d'après (1)} \\
 &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
 &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
 &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]
 \end{aligned}$$

3. La formule signifie que la probabilité de l'union de n événements est égale à la somme des probabilités de ces événements pris un à un moins la somme des probabilités de ces événements pris deux à deux plus la somme des probabilités de ces événements pris trois à trois, et ainsi de suite.

Pour n=2 la formule est vraie d'après (1)

On suppose qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n est on la démontre à l'ordre n+1

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \text{ d'après (1)} \\
 &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right)
 \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
 &\quad + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 -P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) &= -\sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P((A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap (A_{i_2} \cap A_{n+1})) + \dots + \\
 &\quad -(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} P((A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1})) \\
 &\quad -(-1)^{n+1} P((A_1 \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_n \cap A_{n+1}))
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + \\
 &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n+1} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1})
 \end{aligned}$$

Exercice 3

On jette deux dés bien équilibrés. Quel est l'ensemble fondamental pour cette expérience aléatoire?
On note par F l'évènement : « au moins l'un des dés montre 1 » et par G : « la somme des nombres montrés par les dés est 5 ».

1. Déterminer les évènements F, G et calculer leurs probabilités.
2. Déterminer les évènements $F \cup G$, $F \cap G$ et calculer leurs probabilités.

L'ensemble fondamental pour cette expérience :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), \dots, (2,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

$$\Omega = \{(i, j) | 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\text{Le cardinal de l'ensemble } \Omega : \text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$$

Description de l'évènement	Évènement	Probabilité
F l'évènement : « au moins l'un des dés montre 1 »	$F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$	$P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{36}$
G : « la somme des nombres montrés par les dés est 5 ».	$G = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$	$P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$F \cup G$: « La somme des nombres montrés par les dés est 5 ou au moins l'un des dés montre 1 »,	$F \cup G = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (2,3), (3,2)\}$	$P(F \cup G) = \frac{\text{card}(F \cup G)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{13}{36}$
$F \cap G$: « La somme des nombres montrés par les dés est 5 et au moins l'un des dés montre 1 »,	$F \cap G = \{(1,4), (4,1)\}$	$P(F \cap G) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

On a bien $P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$

Exercice 4

On sélectionne un échantillon ordonné de taille 3 d'un ensemble de 26 jetons sur lesquels figurent les lettres de l'alphabet. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : "ce sont 3 consonnes" ;
2. B : "ce sont 3 voyelles" ;
3. C : "c'est le mot MOI" ;
4. D : "c'est une anagramme du mot MOI".

L'échantillon étant ordonné, le nombre de cas possibles est le nombre d'arrangements sans répétition

$$A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24$$

$$1. \quad P(A) = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}} = \frac{A_{20}^3}{A_{26}^3}$$

$$2. \quad P(B) = \frac{A_6^3}{A_{26}^3}$$

$$3. \quad P(C) = \frac{1}{A_{26}^3}$$

$$4. \quad P(D) = \frac{3!}{A_{26}^3}$$

Exercice 5

On lance trois Dés. Quelle est la probabilité que deux au moins des trois faces qui apparaissent soient identiques

L'ensemble fondamental

$$\Omega = \{(i, j, k) / 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6, 1 \leq k \leq 6\}$$

Le cardinal de l'ensemble Ω : $\text{card}(\Omega) = 6^3 = 216$

Soit l'évènement B : « deux au moins des trois faces qui apparaissent sont identiques »

$\bar{B}$: « les trois faces sont différentes »

$$P(\bar{B}) = \frac{\text{card}(\bar{B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6^3}{6^3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{216} = \frac{120}{216}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{96}{216}$$

Exercice 6

Quel est l'évènement le plus probable : « obtenir au moins une fois le 1 » en lançant 4 fois un dé ou « obtenir au moins une paire de 1 » en lançant 24 fois 2 dés .

Solution

Soient les évènements

A « obtenir au moins 1 as en lançant 4 fois un dé »

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (5/6)^4 \approx 0.518$$

et B « obtenir au moins une paire d'as en lançant 24 fois 2 dés ».

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (35/36)^{24} \approx 0.491$$

L'évènement A est le plus probable.

Exercice 7

a) 2 événements A et B, incompatibles et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On a $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ donc $P(A) \times P(B) \neq 0$

$A \cap B = \emptyset$ (A et B incompatibles) donc $P(A \cap B) = 0$

D'où $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

b) Démontrer que si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\bar{B}$ sont indépendants

A et B indépendants i.e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad \text{alors} \quad P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$
$$\text{car } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

$$\text{donc } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P(\bar{B})$$

- c) Montrer que si deux événements A et B sont indépendants alors leurs contraires $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

On a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) \\ &= P(\bar{A}) - P(B)[1 - P(A)] = P(\bar{A}) - P(B) P(\bar{A}) = P(\bar{A})[1 - P(B)] = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

- d) Soient deux événements A et B telles que $P(A) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 1/2$

- Si A et B sont incompatibles, calculer P(B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ donc } P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 1/2 - 1/5$$

- Si A et B sont indépendants, calculer P(B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$\text{Donc } P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{1/2 - 1/5}{1 - 1/5} = 3/8$$

Exercice 8

30 % des étudiants de la 1^{ère} année ont échoué au cours de Probabilités, 20 % ont échoué au cours d'Analyse et 10 % ont échoué aux deux cours.

On rencontre un étudiant au hasard. Calculer :

- la probabilité que cet étudiant ait réussi le cours de Probabilités et échoué au cours d'Analyse.
- la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a échoué au cours de Probabilités.
- la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a réussi au cours de Probabilités.

Soit les événements suivants :

A : « l'étudiant a échoué au cours d'analyse »

B : « l'étudiant a échoué au cours de probabilités »

On a : $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,1$

- On cherche $P(A \cap \bar{B})$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \text{ alors } P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

car $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

$$\text{Et donc } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

- On cherche $P(A/B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

3. On cherche $P(A/\bar{B})$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,1}{1-0,3} = \frac{1}{7}$$

Exercice 9

Chaque matin de classe, Ahmed peut être victime de deux **événements indépendants** :

- **R** : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
- **S** : « son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de **R** est égale à **0,1** et que celle de **S** est égale à **0,05**.

Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Ahmed est en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

1) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Ahmed entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

On a $P(R) = 0.1$ et $P(S) = 0.05$

R et S sont indépendants donc $P(R \cap S) = P(R) \times P(S) = 0.1 \times 0.05 = 0.005$

1) On cherche $P(\bar{R} \cap S)$

On a : $S = (R \cap S) \cup (\bar{R} \cap S)$ d'où

$$P(S) = P((R \cap S) \cup (\bar{R} \cap S)) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$$

$$P(\bar{R} \cap S) = P(S) - P(R \cap S) = 0.05 - 0.005 = 0.045$$

2) Calculer la probabilité que Ahmed soit à l'heure au lycée un jour de classe donné

On cherche $P(\bar{R} \cap \bar{S})$

$$P(\bar{R} \cap \bar{S}) = P(\bar{R}) \times P(\bar{S}) \quad (\bar{R} \text{ et } \bar{S} \text{ sont indépendants car } R \text{ et } S \text{ sont indépendants})$$

$$P(\bar{R} \cap \bar{S}) = (1 - P(R)) \times (1 - P(S))$$

$$P(\bar{R} \cap \bar{S}) = (1 - 0.1) \times (1 - 0.05) = 0.855$$

Exercice 10

Une employée a demandé à son chef un certificat de travail en vue d'un nouvel emploi. Elle estime à 80% sa chance d'obtenir ce travail si le certificat est très bon, à 40% s'il est bon et à 10% s'il est moyen. En plus, elle estime la probabilité à 0,7 d'obtenir un très bon certificat, à 0,2 un bon et à 0,1 un moyen.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le nouvel emploi ?
2. Sachant qu'elle obtient l'emploi, quelle est la probabilité qu'elle ait un très bon certificat ?
3. Même question qu'en b) sachant qu'elle ne l'obtient pas ?

Soient les événements suivants :

A_1 : « l'employée obtient de son chef un très bon certificat »

A_2 : « l'employée obtient de son chef un bon certificat »

A_3 : « l'employée obtient de son chef un certificat moyen »

B : « l'employée obtient le nouvel emploi »

1. On cherche $P(B)$

$$P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + P(B/A_3) \times P(A_3)$$

$$\text{On a : } P(A_1) = 0.7, \quad P(A_2) = 0.2, \quad P(A_3) = 0.1$$

$$P(B/A_1) = 0.8; \quad P(B/A_2) = 0.4, \quad P(B/A_3) = 0.1$$

$$P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + P(B/A_3) \times P(A_3) = 0.8 \times 0.7 + 0.4 \times 0.2 + 0.1 \times 0.1 = 0.65$$

$$2. \quad P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \times P(A_1)}{P(B)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{0.8 \times 0.7}{0.65} = 0.86$$

$$3. \quad P(A_1/\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap A_1)}{P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

Et

$$A_1 = (B \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_1) \text{ donc } P(A_1) = P(B \cap A_1) + P(\bar{B} \cap A_1)$$

$$P(\bar{B} \cap A_1) = P(A_1) - P(B \cap A_1) = P(A_1) - P(B/A_1) \cdot P(A_1) = 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.14$$

$$P(A_1/\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap A_1)}{P(\bar{B})} = \frac{0.14}{1 - 0.65} = 0.4$$