
Examen de Rattrapage d'Équations Différentielles Fractionnaires (Durée : 1 heure 30 minutes)

Questions de cours

1. Donner la définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction f définie sur $[a, b]$.
2. Comparer entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Exercice 01:

1. Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue sur $J = [0, a)$, si Df est continue, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$D(I^\alpha f(x)) = I^\alpha(Df(x)) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.$$

2. Soit $f(t) = (t - a)^\beta$ avec $\beta > -1$. Calculer $I_a^\alpha f(t)$ et ${}_{RL}D_a^\alpha f(t)$.
3. Donner un exemple de fonction pour laquelle la dérivée de Caputo n'existe pas, mais celle de Riemann-Liouville existe.

Exercice 02:

1. Montrer que, pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad s > 0, \quad |\lambda s^\alpha| < 1.$$

et

$$\mathcal{L}(D_0^\gamma y(t))(s) = s^\gamma \mathcal{L}(y(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_0^{\gamma-k-1} y(0).$$

2. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(t) - 2y''(t) = f(t), & t > 0, \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ D_0^{\alpha-k-1} y(0) = c_{k+1}, & k = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Where D_0^α is the Riemann-Liouville derivatioive of order α .

3. En utilisant la méthode de perturbation d'homotopie, résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y(t) + y^3(t) = e^{-t}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

où ${}_0^C D_t^\alpha$ est la dérivée de Caputo.