Éléments du calcul tensoriel

0.1 Introduction

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel continu si à chaque instant et en chaque point de ce domaine on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel. La grandeur physique peut être représentée mathématiquement par :

- un scalaire (masse volumique, température, concentration d'un polluant,...) ;
- un vecteur (vitesse, accélération, forces volumiques, couples volumiques,...) ;
- un tenseur d'ordre 2 (déformations, contraintes,...) ;
- un tenseur d'ordre supérieur à 2 comme par exemple le tenseur d'élasticité qui est d'ordre 4.

La grandeur physique donnée à chaque instant et en chaque point forme ce que l'on appelle un champ. On parlera par exemple du champ de température dans une pièce automobile à un instant donné ou bien de l'évolution du champ de contrainte dans une tôle lors de son écrasement par une presse.

Le système d'unité international comporte sept unités fondamentales que sont :

- l'unité de masse (le kilogramme : kg) ;
- l'unité de mesure (le mètre : m) ;
- l'unité de temps (la seconde : s) ;
- l'unité de température (le Kelvin : K) ;
- l'unité de courant électrique (l'Ampère : A) ;
- l'unité de quantité de matière (la môle : mol).

Toutes les autres unités peuvent se déduire de ces unités fondamentales et sont introduites par commodité. Par exemple,

- le Newton (N) est en fait $mkgs^{-2}$;
- le Pascal (Pa) est Nm^{-2} donc $m^{-1}kgs^{-2}$;
- le Joule (unité de travail) est en m^2kgs^{-2} ;
- le Watt (unité de puissance) en m^2kgs^{-3}.

0.1.1 Convention d'Einstein

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. Ces outils mathématiques indispensables permettent d'établir des résultats fondamentaux indépendamment du référentiel choisi. Grâce à cela, on peut porter son attention sur les phénomènes physiques qu'elles représentent plutôt que sur les équations elles-mêmes.

Les scalaires, vecteurs et tenseurs ont en effet la propriété d'être invariant lors d'un changement de base. C'est ainsi que grâce à ces quantités on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque c'est à dire indépendamment de la base choisie.

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs $1, 2$ et 3.

Par exemple, $a_i b_i$ est la notation compacte pour $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. L'indice répété sur lequel on effectue la sommation est appelé indice muet. On peut lui substituer n'importe quel indice pourvu qu'il diffère des autres indices présents dans le monôme. Un indice non muet est dit franc. Ainsi, dans $a_{ij}b_j$, l'indice i est franc et l'indice j est muet . Cette convention de sommation est dite **convention d'Einstein**.

0.2 Tenseurs sur un espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n = 1, 2$ ou 3, sur le corps des réels. Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés **vecteurs**. Ils sont soulignés : $\underline{u} \in \mathbb{E}$. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{E}$ s'appelle **l'espace dual** $\mathbb{E}^*$ de $\mathbb{E}$.

0.2.1 Définition d'un tenseur

Pour deux entiers p et q on appelle tenseur[1] **p-contravariant** et **q-covariant** toute forme multilinéaire sur $(\mathbb{E}^*)^p \times \mathbb{E}^q$. Il s'agit donc d'une application qui à p éléments de $\mathbb{E}^*$ et à q éléments de $\mathbb{E}$ attribue un réel. La somme $p + q$ s'appelle **l'ordre du tenseur**. On distingue donc les

- **Tenseur d'ordre** 0 : On convient qu'il s'agit des scalaires. L'ensemble des tenseurs d'ordre 0 est identifié à $\mathbb{R}$
- **Tenseur d'ordre** 1 :

1. L'intérêt des tenseurs est de représenter les équations qui gouvernent un phénomène physique de manière intrinsèque

- $\star$ $(p,q)=(1,0)$: Il s'agit des vecteurs, i.e. les éléments de $\mathbb{E}$.
  En effet, la définition indique qu'un tenseur d'ordre 1 associe un réel à tout élément de $\mathbb{E}^*$. Les tenseurs $1-$fois contravariants sont donc les éléments du bidual, identifiés aux vecteurs de $\mathbb{E}$. L'ensemble des tenseurs $1-$fois contravariants est donc l'espace $\mathbb{E}$ lui-même.
- $\star$ $(p,q)=(0,1)$: Il s'agit des covecteurs, i.e. les éléments de $\mathbb{E}^*$.
  En effet, la définition d'un tenseur $1-$fois covariant indique qu'il associe à tout élément de $\mathbb{E}$ un réel, c'est donc un élément du dual.
  En mécanique des milieux continus, l'élément de surface $\underline{ds}$ (et donc aussi la normale $\underline{n}$) est un covecteur. En effet, c'est la grandeur qui opère sur un vecteur $\underline{v}$ pour donner le volume du cylindre engendré par l'élément de surface et le vecteur $\underline{v}$

$$\langle \underline{ds}, \underline{v} \rangle = dv \quad \text{noté dans un espace Euclidien :} \quad \underline{ds}\,.\,\underline{v} = dv$$

- **Tenseur d'ordre** 2 : Il opèrent sur des couples de vecteurs ou de covecteurs.
  - $\star$ $(p,q)=(2,0)$: Il s'agit des tenseurs $2-$fois contravariants. Ils opèrent sur des couples de covecteurs pour donner un scalaire :

$$\underset{\sim}{\tau} \;\; 2- \text{ fois contravariant :} \quad \mathbb{E}^* \times \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

    L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, $2-$fois contravariants est noté $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$
  - $\star$ $(p,q)=(0,2)$: Il s'agit des tenseurs $2-$fois covariants. Ils opèrent sur des couples de vecteurs pour donner un scalaire :

$$\underset{\sim}{\tau} \;\; 2- \text{ fois contravariant :} \quad \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

    L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, $2-$fois covariants est noté $\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}^*$
  - $\star$ $(p,q)=(1,1)$: Il s'agit des tenseurs $1-$fois covariant et $1-$fois contravariant. Ils opèerent sur des couples (vecteurs, covecteurs) pour donner un scalaire :

$$\underset{\sim}{\tau} \;\; 1- \text{ fois contravariant :} \quad \mathbb{E} \times \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **Tenseur d'ordre** 4 : Ils jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'élasticité. Ils sont notés $\underline{\underline{\Lambda}}$

0.2.2 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker (on dit aussi le delta de Kronecker) est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \tag{0.1}$$

0.2.3 Symbole de permutation

Soient $i,\ j,\ k$ trois indices ayant des valeurs différentes. On dit qu'ils forment une permutation paire de $1,\ 2,\ 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre pair de permutations. On dit qu'ils forment une permutation impaire de $1,\ 2,\ 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre impair de permutations. Cela étant, le symbole de permutation est défini par

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux quelconques des indices sont égaux,} \\ +1 & \text{si } i,\ j,\ k \text{ forment une permutation paire de } 1,\ 2,\ 3, \\ -1 & \text{si } i,\ j,\ k \text{ forment une permutation impaire de } 1,\ 2,\ 3, \end{cases} \tag{0.2}$$

0.2.4 Changement de base

Considérons deux bases orthonormées composées de vecteurs de bases unitaires et orthogonaux entre eux, dont les bases respectives sont notées $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3,)$ et $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*,)$.
Soient, P_{ij}, les coefficients caractérisant ce changement de repère :

$$P_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j^* \tag{0.3}$$

Où " $\cdot$ " représente le produit scalaire usuel voir (**??**)

Ils peuvent s'interpréter comme composantes de e_i dans le repère $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$.

$$\underline{e}_i = P_{ij}\underline{e}_j^* \tag{0.4}$$

et réciproquement, les coefficients P_{ij} peuvent s'interpréter comme composantes de $(\underline{e}_j^*$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

$$\underline{e}_j^* = P_{ij}\underline{e}_i = P_{ji}^t\underline{e}_i \tag{0.5}$$

On en déduit que

$$\underline{e}_j^* = \underbrace{P_{ji}^t P_{ik}}_{\delta_{jk}}\ \underline{e}_k^*. \tag{0.6}$$

ce qui indique que la matrice de passage P est une matrice orthogonale : son inverse et sa transposée coïncident.

0.2.5 Scalaire

Certaines grandeurs comme la masse volumique ou la température s'expriment par un seul nombre, qui ne dépend pas de la base choisie. Ce sont des scalaires. De manière plus mathématique, nous définirons un scalaire comme suit : un scalaire s est un être mathématique à une seule composante et invariant lors d'un changement de base.

0.2.6 Vecteurs

Des grandeurs telles que la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, un flux de chaleur ou une force sont caractérisés par leur direction, leur sens et leur intensité. Ce sont des vecteurs. Un vecteur possède trois composantes qui dépendent du repère choisi $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$

$$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3 \tag{0.7}$$

En notation indicielle, on écrira plutôt

$$\underline{a} = a_i\underline{e}_i = a_i^*\underline{e}_i^* \tag{0.8}$$

un vecteur $\underline{a}$ est un être mathématique qui, lors d'un changement de repère $e_i = P_{ij}e_j^*$ se transforme selon la formule $a_i = P_{ij}a_j^*$ où P est la matrice de passage.

0.2.7 Produit tensoriel

Le produit tensoriel, noté $\otimes$ est l'opération permettant de construire des tenseurs d'ordre 2 à partir de vecteurs et covecteurs. Le produit tensoriel de deux vecteurs $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{E}$ est un tenseur d'ordre 2 du type $(2, 0)$.

Les composantes du tenseur $\underline{a} \otimes \underline{b}$ par rapport à une base donnée forment une matrice qui s'obtient par le produit du vecteur colonne $[a_i]$ par le vecteur ligne $[b_j]^t$:

$$[\underline{a} \otimes \underline{b}] = [\underline{a}][\underline{b}]^t \tag{0.9}$$

0.2.8 Tenseurs d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 du type $(2,0)$ s'exprime par

$$\underset{\sim}{A} = A_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{0.10}$$

Un tenseur d'ordre 2 est un être mathématique à 9 composantes qui, lors d'un changement de base $\underline{e}_i = P_{ij}\underline{e}_j^*$, se transforme selon les formules :

$$A_{ij} = P_{ik}A_{kl}^* P_{lj}^t \qquad A_{kl}^* = P_{ki}^t A_{ij} P_{jl}^t \tag{0.11}$$

ou sous forme matricielle

$$\left[\underset{\sim}{A}\right] = P\left[\underset{\sim}{A}\right]_* P^t \qquad \left[\underset{\sim}{A}\right]_* = P^t\left[\underset{\sim}{A}\right] P \tag{0.12}$$

Un tenseur d'ordre 2 est une quantité intrinsèque indépendante de la base choisie alors que la matrice P est un tableau de nombre donnant les produits scalaires entre les vecteurs de la première et de la seconde base : $P_{ij} = \underline{e}_i\underline{e}_j^*$

Opérations sur les tenseurs

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et soient $\underline{u}$, $\underline{v} \in \mathbb{E}$; $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathbb{E}\otimes\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned}
\underline{u}.\underline{v} &= u_i\, v_i = \quad [\underline{u}]^t\,[\underline{v}] \\
\underset{\sim}{T}.\underline{v} &= T_{ij}\, v_j\, \underline{e}_i = [\underset{\sim}{T}]\,[\underline{v}] \\
\underline{v}.\underset{\sim}{T} &= v_i\, T_{ij}\, \underline{e}_j = [\underset{\sim}{T}]^t\,[\underline{v}] \\
\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{B} &= A_{ij}\, B_{ij} = [\underset{\sim}{A}]\,[\underset{\sim}{B}] \ \text{ Le produit doublement contracté}
\end{aligned}$$

Tenseur identité

Le tenseur identité est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$\left[\underset{\sim}{I}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{0.13}$$

autrement dit $I_{ij} = \delta_{ij}$

Tenseur symétrique et antisymétrique

Un tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{S}$ est symétrique s'il est égal à sa transposée : i.e $\underset{\sim}{S} = (\underset{\sim}{S})^t$ et donc $S_{ij} = S_{ji}$.

Un tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{A}$ est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de sa transposée : i.e $\underset{\sim}{A} = -(\underset{\sim}{A})^t$ et donc $A_{ij} = -A_{ji}$ et ceci n'est possible que si les termes diagonaux sont nuls i.e : $a_{ii} = 0$ pour $i = \overline{1,3}$.

La symétrie ou l'antisymétrie est une propriété intrinsèque d'un tenseur i.e : Si la matrice représentant les composantes d'un tenseur dans une base est (anti)symétrique, elle le restera dans tout autre base.

Tout tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{T}$ peut s'écrire comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{A}; \quad \underset{\sim}{S} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{T} + (\underset{\sim}{T})^t\right); \quad \underset{\sim}{A} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{T} - (\underset{\sim}{T})^t\right) \tag{0.14}$$

Trace d'un Tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux

$$trace\left[\underset{\sim}{A}\right] = A_{ii} \tag{0.15}$$

Tenseur sphérique et déviatorique

Pour tout tenseur $\underset{\sim}{T}$ d'ordre 2, on définit ses parties sphérique et déviatorique de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^{sph} + \underset{\sim}{T}^{dev}; \quad \text{avec : } \underset{\sim}{T}^{sph} := \frac{1}{3}\left(trace\underset{\sim}{T}\right)\underset{\sim}{I}; \quad \underset{\sim}{T}^{dev} := \underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}^{sph} \tag{0.16}$$

0.2.9 Décomposition spectrale d'un tenseur

On dit que $\underline{v}$ est une direction principale (ou un vecteur propre) du tenseur $\underset{\sim}{A}$ si pour un certain λ on a :

$$\underset{\sim}{A}\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad \text{i.e} \quad A_{ij}v_j = \lambda v_i \tag{0.17}$$

La valeur λ est appelée valeur principale (ou valeur propre) de $\underset{\sim}{A}$ associée à la direction principale $\underline{v}$.

Pour trouver $\underline{v}$, on écrit (0.17) sous la forme

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}).\underline{v} = 0 \quad \text{i.e} \quad (A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0 \tag{0.18}$$

Ces équations constituent un système homogène de trois équations à trois inconnues v_1, v_2, v_3 qui n'admet de solution non triviale que si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule : $det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0$. On peut toujours trouver trois vecteurs propres orthogonaux pour un tenseur réel symétrique d'ordre 2.
La base formée par ces trois vecteurs est appelée base principale. Dans cette base, les coefficients du tenseur $\underset{\sim}{A}$ forment une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres principales.

$$\left[\underset{\sim}{A}\right]_p = P^t \left[\underset{\sim}{A}\right] P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{0.19}$$

La matrice de passage est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \cdot \underline{e}_1 & \underline{v}_2 \cdot \underline{e}_1 & \underline{v}_3 \cdot \underline{e}_1 \\ \underline{v}_1 \cdot \underline{e}_2 & \underline{v}_2 \cdot \underline{e}_2 & \underline{v}_3 \cdot \underline{e}_2 \\ \underline{v}_1 \cdot \underline{e}_3 & \underline{v}_2 \cdot \underline{e}_3 & \underline{v}_3 \cdot \underline{e}_3 \end{bmatrix} \tag{0.20}$$

Enfin, on vérifie facilement que le tenseur $\underset{\sim}{A}$ peut s'écrire :

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 \otimes \underline{v}_3 \tag{0.21}$$

C'est ce qu'on appelle la décomposition spectrale du tenseur.

Théorème 0.1 ***(Cayley-Hamilton)***
Pour tout endomorphisme sur $\mathbb{E}$ où $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3, le polynôme en $\underset{\sim}{A}$ suivant est nul

$$\underset{\sim}{A}^3 - I_1 \underset{\sim}{A}^2 - I_2 \underset{\sim}{A} - I_3 \underset{\sim}{I} = 0$$

Ses coefficients I_i, appelés ***invariants principaux*** *de $\underset{\sim}{A}$, sont les coefficients du polynôme caractéristique de $\underset{\sim}{A}$:*

$$det(\lambda \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}) = \left|\lambda \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}\right| = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3$$

Remarque 0.1
1. La valeur des coefficients du polynôme caractéristique ne dépend pas du choix de la base.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= trace(\underset{\sim}{A}),\ I_2 = \frac{1}{2}\left((trace\underset{\sim}{A})^2 - trace\underset{\sim}{A}^2\right) = trace\underset{\sim}{A}^{-1}det\underset{\sim}{A} \\
I_3 &= \frac{1}{6}\left((trace\underset{\sim}{A})^3 - 3(trace\underset{\sim}{A})(trace\underset{\sim}{A}^2) + 2(trace\underset{\sim}{A}^3)\right) \qquad (0.22)
\end{aligned}
$$

La seconde relation utilisant l'inverse de $\underset{\sim}{A}$ n'est bien sûr valable que dans le cas où $\underset{\sim}{A}$ est inversible.
2. Le polynôme caractéristique admet (au moins dans $\mathbb{C}$) trois racines a_1, a_2, a_3 . Les invariants principaux s'expriment en fonction de ces racines :

$$
I_1 = a_1 + a_2 + a_3,\ I_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,\ I_3 = a_1a_2a_3 = det\,\underset{\sim}{A} \qquad (0.23)
$$

3. Les expressions précèdentes indiquent que les ensembles $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{I_1, I_2, I_3\}$ et $\{trace\underset{\sim}{A}, trace\,\underset{\sim}{A}^2, trace\,\underset{\sim}{A}^3\}$ contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base choisie. Ils sont équivalents à la connaissance des racines du polynôme caractéristique.

0.3 Opérateurs différentiels

On introduit **Les opérateurs nabla** Lagrangien [2] et Eulerien respectivement par

$$
\nabla_X := \frac{\partial}{\partial X_i}\underline{E}_i, \quad \nabla_x := \frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i. \qquad (0.24)
$$

0.3.1 Gradient

Définition 0.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ $(m = 2$ ou $m = 3)$ et $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction telle que toutes les dérivées partielles existent en tout point de U. Le gradient de F est l'application (pour être plus rigoureux, le champ de vecteurs) noté ∇F ou* $\mathrm{grad}(F)$
$\nabla F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ défini par

$$
\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m} \end{pmatrix} \qquad (0.25)
$$

2. Nous verrons au chapitre suivant les définitions respectives des variables Lagrangienne et Eulerienne

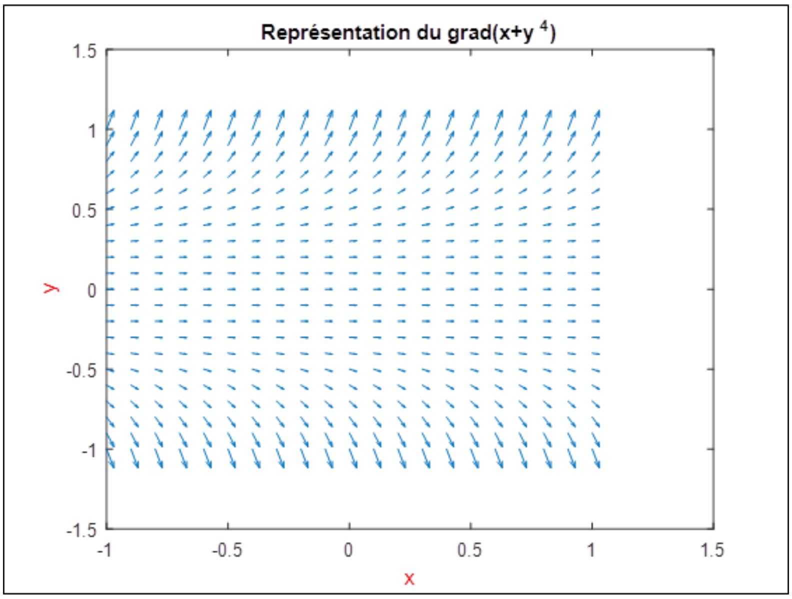
L'opérateur gradient augmente de 1 le degré du champ de tenseurs auquel il est appliqué.

Exemple 0.1 *On définit la fonction scalaire* $f(x;y) = x + y^4$
Calculer $\operatorname{grad} f(x;y)$ *; représenter le vecteur gradient dans un repère orthonormé.*

Solution

$$\operatorname{grad} f(x;y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y^4); \frac{\partial}{\partial y}(x+y^4)\right)^t = (1; 4y^3)^t$$

Dans un repère orthonormé, le vecteur gradient pointe dans la direction où la fonction croît le plus rapidement, et son module est égal au taux de croissance dans cette direction.



0.3.2 Produit extérieur

Il existe un autre produit dans $\mathbb{R}^3$: le produit vectoriel ou extérieur. Il associe à une paire de vecteurs un autre vecteur. Soit $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ alors le produit extérieur de $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ et $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$, noté $\underline{u} \wedge \underline{v}$ ou encore $[\underline{u}, \underline{v}]$, est défini par

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = u_iv_j\varepsilon_{ijk}\underline{e_k} \tag{0.26}$$

Où ε_{ijk} est le symbole de permutations défini par (0.2)

Rotationnel

Définition 0.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit $\underline{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Le rotationnel de $\underline{F}$ est le champ vecteurs noté $\nabla \wedge \underline{F}$ défini par*

$$\nabla \wedge \underline{F}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(\underline{X}) & F_2(\underline{X}) & F_3(\underline{X}) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} F_{k,j} \underline{e_i} \tag{0.27}$$

Le rotationnel mesure normalement à quel point le champ de vecteurs "tourne". Plus précisément, si le champ de vecteurs est interprété comme, par exemple, la vitesse du vent (à une altitude fixée) dans une région, alors les tourbillons et tornades seraient des points avec un grand (en valeur absolue) rotationnel tandis que sur une plage avec une brise de mer constante le rotationnel serait nul. Le signe du rotationnel ne fait qu'indiquer le sens de la rotation.

Produit mixte

Étant donné $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$, $|(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w}|$ est le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs. Ceci a pour conséquence que le produit vectoriel de deux vecteurs orthogonaux de norme 1 est un troisième vecteur qui complète la base orthonormale. L'application $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \longmapsto (\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w}$ est nommée produit mixte ou produit scalaire triple. Notons qu'une permutation des trois membres dans le "bon" ordre ne change pas le produit mixte, alors qu'une permutation dans le "mauvais" ordre change son signe, i.e.

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{w} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{u} = -(\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v} = -(\underline{v} \wedge \underline{u}) \cdot \underline{w} = -(\underline{w} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{u} \tag{0.28}$$

0.3.3 Divergence

Une autre caractéristique importante d'un champ de vecteurs $\underline{u}$ ou de tenseurs $\underset{\sim}{T}$ est sa tendance à se "disperser". Ce qui sera mesuré par la divergence que l'on définit par :

$$\text{div}\underline{u} := \nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \text{ ou div}\underset{\sim}{T} := \nabla \cdot \underset{\sim}{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i \tag{0.29}$$

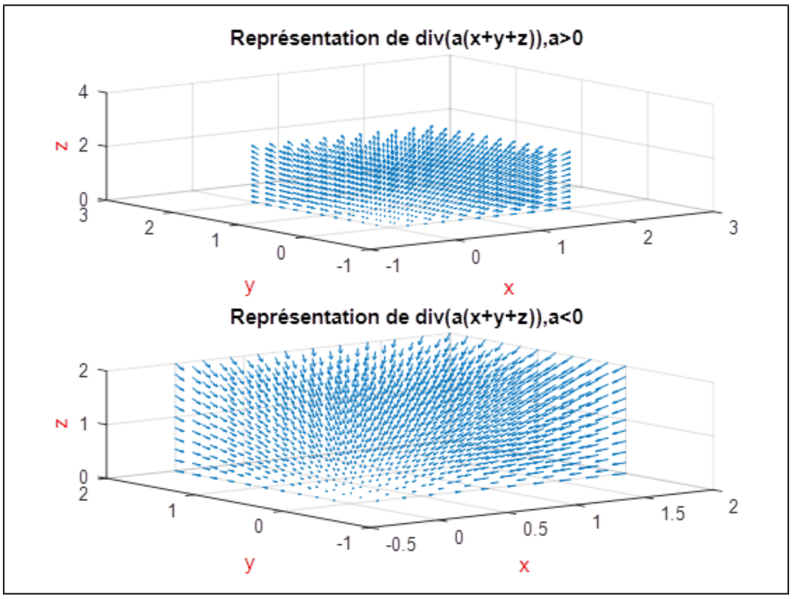
L'opérateur différentiel divergence abaisse de 1 l'ordre du champ de tenseur.

Exemple 0.2 *On définit le champ de vecteurs* $\underline{F}(x;y;z) = (ax;ay;az)$ *où* a *est une constante réelle.*
Calculer $\operatorname{div}\underline{F}(x;y;z)$ *; représenter le champ de vecteurs pour* $a>0$ *et pour* $a<0$.
Pouvez-vous en déduire une interprétation géométrique de la divergence ?

Solution

$$\operatorname{div}\underline{F}(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(ay) + \frac{\partial}{\partial z}(az) = 3a$$

Comme le montre la figure ci au dessous , le champ de vecteurs diverge pour $a>0$.



0.3.4 Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes

Si le système de coordonnées est cartésien orthonormé, on vérifiera que les opérateurs différentiels prennent les formes simples suivantes

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{e}_i = f_{,i}\underline{e}_i \tag{0.30}$$

$$\text{grad}\underline{u} = \nabla\underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = u_{i,j}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{0.31}$$

$$\text{div}\underline{u} = \nabla \cdot (\underline{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{e}_i.\underline{e}_j = u_{i,i} \tag{0.32}$$

$$\text{div}\,\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\underline{e}_i = \sigma_{ij,j}\underline{e}_i \tag{0.33}$$

où l'on a introduit la notation fréquente : $_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

0.3.5 Changement de coordonnées

Soit (x, y, z) les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, exprimées comme des fonctions de (u_1, u_2, u_3) par

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{0.34}$$

Supposons que (0.34) puisse se résoudre en u_1, u_2, u_3 comme fonction de x, y et z c'est-à-dire

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z) \tag{0.35}$$

Etant donné un point M de coordonnées rectangulaires (x, y, z) nous pouvons, d'aprés (0.35) lui associer un seul ensemble de coordonnées (u_1, u_2, u_3) appelées les coordonnées curvilignes de M. les ensembles d'équations (0.34) et (0.35) définissent un changement de coordonnées.

Cordonnées curvilingnes orthogonales

Soient $u_1 = C_1, u_2 = C_2, u_3 = C_3$ où C_1, C_2, C_3 sont constants, des surfaces de coordonnées et ces surfaces se coupent chacunes deux à deux suivant des courbes appelées courbes ou droites de coordonnées. Si les surfaces de coordonnées se coupent en formant des angles droits, le système de coordonnées curvilignes s'appelle orthogonal.
Les courbes de coordonnées u_1, u_2, u_3 d'un système de coordonnées curvilignes sont analogues aux axes de coordonnées x,y et z d'un repère rectangulaire.

Vecteurs unites en coordonnées orthogonales

Soit la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\underline{i} = \underline{e}_x, \underline{j} = \underline{e}_y, \underline{k} = \underline{e}_z \tag{0.36}$$

$\underline{OM} = x\underline{\mathbf{i}} + y\underline{\mathbf{j}} + z\underline{\mathbf{k}}$ le vecteur de position d'un point M. Alors (0.35) peut s'écrire

$$\underline{OM} = \underline{OM}(u_1, u_2, u_3). \tag{0.37}$$

Un vecteur tangent à la courbe u_1 en M (pour laquelle u_2 et u_3 sont constants) est

$$\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1} \tag{0.38}$$

Un vecteur unité tangent dans cette direction est

$$\underline{e}_1 = \frac{\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1}}{\left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1}\right|} \tag{0.39}$$

$$\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1} = h_1 \underline{e}_1 \quad \text{avec} \quad h_1 = \left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1}\right| \tag{0.40}$$

De même, si $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ sont des vecteurs-unités tangents aux courbes u_2 et u_3 en M respectivement, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_2} = h_2 \underline{e}_2 \quad \text{avec} \quad h_2 = \left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_2}\right| \\ \\ \dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3} = h_3 \underline{e}_3 \quad \text{avec} \quad h_3 = \left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3}\right| \end{cases} \tag{0.41}$$

Remarque 0.2

- *Les quantités h_1, h_2, h_3 s'appellent les facteurs de proportionnalité.*
- *les vecteurs unitaires $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sont dirigés dans le sens où u_1, u_2, u_3 respectivement, s'accroissent.*
- *Les vecteurs tangents aux courbes de u_1, u_2 et u_3 sont donnés respectivement par $\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1}, \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_2}$ et $\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3}$.*

On note par $\underline{dM}$ la différetielle du vecteur position $\underline{OM}$ en fonction des coordonnées curvilignes orthogonales.

$$\begin{aligned} \underline{dM} &= \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3} du_3 \\ &= h_1\, du_1 \underline{e}_1 + h_2\, du_2 \underline{e}_2 + h_3\, du_3 \underline{e}_3. \end{aligned} \tag{0.42}$$

Gradient en coordonnées orthogonales

Soit f une fonction de classe C^1 ; Le gradient de f en coordonnées curvilignes orthogonales est donné par

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\underline{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\underline{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\underline{e}_3. \tag{0.43}$$

En effet ;

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = f_1\underline{e}_1 + f_2\underline{e}_2 + f_3\underline{e}_3 \quad \text{où } f_1,\ f_2,\ f_3, \text{ sont à déterminer}$$

$$\begin{aligned} df &= \nabla f \cdot \underline{dM} \\ &= (f_1\underline{e}_1 + f_2\underline{e}_2 + f_3\underline{e}_3) \cdot (h_1\, du_1\underline{e}_1 + h_2\, du_2\underline{e}_2 + h_3\, du_3\underline{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1\, du_1 \\ h_2\, du_2 \\ h_3\, du_3 \end{pmatrix} \\ &= f_1 h_1\, du_1 + f_2 h_2\, du_2 + f_3 h_3\, du_3 \end{aligned} \tag{0.44}$$

D'un autre coté la difféaretielle de f s'écrit

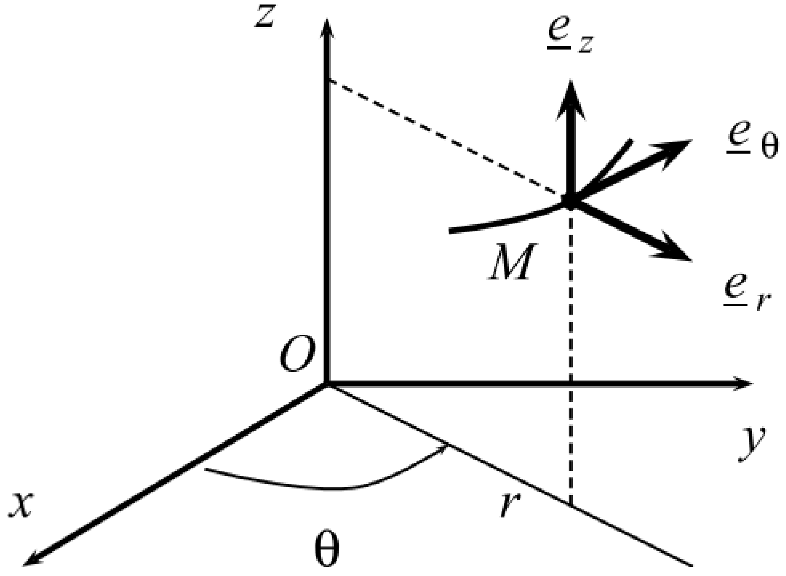
$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \tag{0.45}$$

Il suffit d'égaler (0.44) et (0.45) pour déduire que

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1},\ f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} \text{ et } f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3},$$

D'où le résultat (0.43).

0.3.6 Coordonnées Cylindriques



$$\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z \tag{0.46}$$

$$\begin{aligned} \underline{dM}: &= d(r\underline{e}_r + z\underline{e}_z) = dr\underline{e}_r + rd(\underline{e}_r) + dze_z \\ &= dr\underline{e}_r + rd\theta\underline{e}_\theta + dze_z \end{aligned} \tag{0.47}$$

Les coordonnées Cylindriques (r, θ, z) sont définis par

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$\text{Avec } \; r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

et $h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$
En effet;

$$\underline{OM} = r\cos\theta\ \underline{i} + r\sin\theta\ \underline{j} + z\ \underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial r} = \cos\theta\ \underline{i} + \sin\theta\ \underline{j} + 0\ \underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\theta} = -r\sin\theta\ \underline{i} + r\cos\theta\ \underline{j} + 0\ \underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial z} = 0\ \underline{i} + 0\ \underline{j} + \underline{k}$$

$$\left|\frac{\partial\underline{OM}}{\partial r}\right| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1 = h_1$$

$$\left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = r$$

$$\left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial z}\right| = 1$$

Les vecteurs de base seront d'après (0.39-0.41)

$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial r}, \quad \underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{OM}}{\partial \theta}, \quad \underline{e}_z = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial z} \tag{0.48}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial z} = 0 \end{array}\right. \tag{0.49}$$

Champ scalaire

Pour un champ scalaire : $f(\underline{OM}) = f(r, \theta, z)$

Le gradient

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{e}_z \tag{0.50}$$

En effet ; On calcule le gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en évaluant sa différentielle :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} dr \\ rd\theta \\ dz \end{array}\right] \\ &= [\nabla f]\,[dM] \end{aligned} \tag{0.51}$$

Ce qui permet d'identifier

$$\text{grad} f = [\nabla f] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right] \tag{0.52}$$

Le laplacien

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad} f) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{0.53}$$

Exercice Retrouver l'équation (0.53).

Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{\mathbf{u}} = u_r(r,\theta,z)\underline{e}_r + u_\theta(r,\theta,z)\underline{e}_\theta + u_z(r,\theta,z)\underline{e}_z$$

Le gradient Pour évaluer le gradient de $\underline{u}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$, onévalue sa différentielle

$$\begin{aligned}
d\underline{u} &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial r}dr + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \underline{u}}{\partial z}dz \\
&= \begin{aligned}[t] &\Big(\frac{\partial u_r}{\partial r}dr + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}d\theta - u_\theta d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z}dz\Big)\underline{e}_r + \Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}dr + u_r d\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}dz\Big)\underline{e}_\theta \\
&\qquad + \Big(\frac{\partial u_z}{\partial r}dr + \frac{\partial u_z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)\underline{e}_z \end{aligned} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\Big) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(u_r + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\operatorname{grad}\underline{u}} \begin{bmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{0.54}$$

La divergence

$$\operatorname{div}\underline{u} = \nabla \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{0.55}$$

Le laplacien

$$\Delta(\underline{u}) = \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)\underline{e}_r + \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta + \Delta u_z \underline{e}_z \tag{0.56}$$

Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

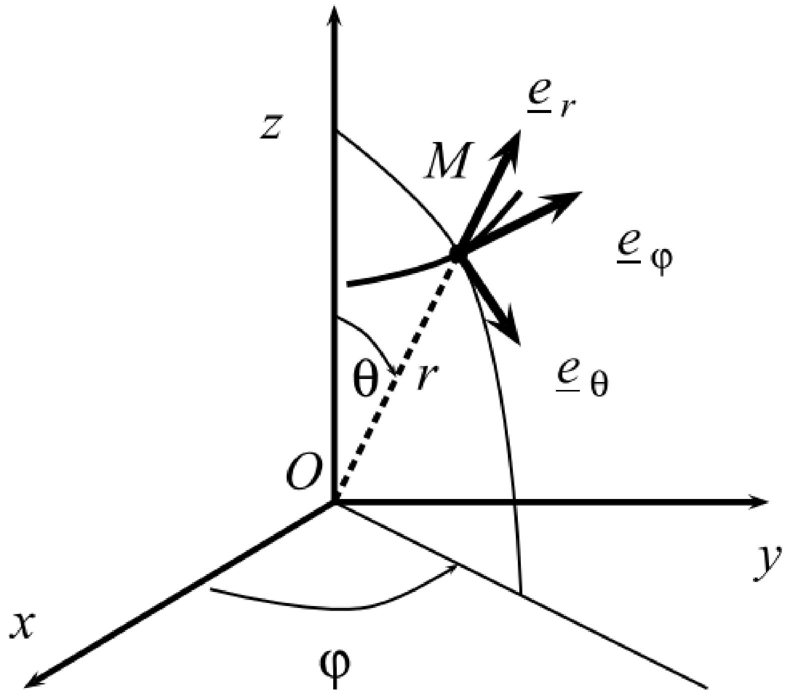
champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underset{\sim}{T}(\underline{OM}) = \underset{\sim}{T}(r,\theta,z) = T_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Divergence de $\underset{\sim}{T}$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underset{\sim}{T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}\right)\underline{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2T_{r\theta}}{r}\right)\underline{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\frac{T_{rz}}{r}\right)\underline{e}_z.\end{aligned} \tag{0.57}$$

0.3.7 Coordonnées Sphériques



Coordonnées (r, θ, φ)

$$\underline{OM} = r\underline{e}_r$$

$$\underline{dM} = dr\underline{e}_r + rd\theta\underline{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\underline{e}_\varphi$$

Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont définis par

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

avec

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

et

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta$$

En effet ;

$$\underline{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\underline{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\underline{j} + r\cos\theta\,\underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\underline{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\underline{j} + \cos\theta\,\underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\underline{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\underline{j} - r\sin\theta\,\underline{k}$$

$$\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\underline{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\underline{j}$$

$$\left|\frac{\partial\underline{OM}}{\partial r}\right| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

$$\left|\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2} = r$$

$$\left|\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2} = r\sin\theta$$

Les vecteurs de base seront d'après (0.39-0.41)

$$\underline{e}_r = \frac{\partial\underline{OM}}{\partial r}, \quad \underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\theta}, \quad \underline{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\underline{OM}}{\partial\varphi} \tag{0.58}$$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
\dfrac{\partial\underline{e}_r}{\partial r} & = & 0, & \dfrac{\partial\underline{e}_\theta}{\partial r} & = & 0, & \dfrac{\partial\underline{e}_\varphi}{\partial r} & = & 0, \\
\dfrac{\partial\underline{e}_r}{\partial\theta} & = & \underline{e}_\theta, & \dfrac{\partial\underline{e}_\theta}{\partial\theta} & = & -\underline{e}_r, & \dfrac{\partial\underline{e}_\varphi}{\partial\theta} & = & 0, \\
\dfrac{\partial\underline{e}_r}{\partial\varphi} & = & \sin\theta\underline{e}_\varphi, & \dfrac{\partial\underline{e}_\theta}{\partial\varphi} & = & \cos\theta\underline{e}_\varphi, & \dfrac{\partial\underline{e}_\varphi}{\partial\varphi} & = & -\sin\theta\underline{e}_r - \cos\theta\underline{e}_\theta
\end{array}\right. \tag{0.59}$$

Champ scalaire

Pour un champ scalaire : $f(\underline{OM}) = f(r,\theta,\varphi)$

Le gradient

$$\mathrm{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi \tag{0.60}$$

Le laplacien

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}(\cot\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{0.61}$$

Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{\mathbf{u}} = u_r(r,\theta,\varphi)\underline{e}_r + u_\theta(r,\theta,\varphi)\underline{e}_\theta + u_\varphi(r,\theta,\varphi)\underline{e}_\varphi$$

On évalue dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$

Le gradient

$$\nabla\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi\right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \cot\theta u_\varphi\right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \cot\theta u_\theta + u_r\right) \end{bmatrix} \tag{0.62}$$

La divergence

$$\mathrm{div}\underline{u} = \nabla\cdot\underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \cot\theta\frac{u_\theta}{r} + 2\frac{u_r}{r} \tag{0.63}$$

Le laplacien

$$\begin{aligned} \Delta(\underline{u}) &= \left(\Delta u_r - \tfrac{2}{r^2}\left(u_r + \tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right)\underline{e}_r \\ &+ \left(\Delta u_\theta + \tfrac{2}{r^2}\left(\tfrac{\partial u_r}{\partial\theta} - \tfrac{u_\theta}{2\sin^2\theta} - \tfrac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}\tfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right)\underline{e}_\theta \\ &+ \left(\Delta u_\varphi + \tfrac{2}{r^2\sin\theta}\left(\tfrac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \cot\theta\tfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \tfrac{u_\varphi}{2\sin\theta}\right)\right)\underline{e}_\varphi \end{aligned} \tag{0.64}$$

Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underset{\sim}{T}(\underline{OM}) = \underset{\sim}{T}(r,\theta,\varphi) = T_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Divergence de $\underset{\sim}{T}$

$$\begin{aligned} div\,\underset{\sim}{T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}(2T_{rr}-T_{\theta\theta}-T_{\varphi\varphi}+T_{r\theta}\cot\theta)\right)\underline{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\left((T_{\theta\theta}-T_{\varphi\varphi})\cot\theta+3T_{r\theta}\right)\right)\underline{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}(3T_{r\varphi}+2T_{\theta\theta}\cot\theta)\right)\underline{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{0.65}$$

0.3.8 Intégration des champs de tenseurs

Théorème de la divergence

Soit Ω une région bornée régulière de l'espace E de frontière $\partial\Omega$, et soient f, $\underline{v}, \underset{\sim}{T}$ des champs de tenseurs respectivement d'ordre 0, 1 et 2, continus et possédant des dérivées premières sur Ω.

$$\int_\Omega \nabla f dv = \int_{\partial\Omega} f\underline{n}ds; \quad \int_\Omega f_{,i}dv = \int_{\partial\Omega} fn_i ds$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}\underline{v}dv = \int_{\partial\Omega} \underline{v}\cdot\underline{n}\,ds; \quad \int_\Omega v_{i,i}dv = \int_{\partial\Omega} v_i n_i ds$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}\underset{\sim}{T}dv = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{T}\cdot\underline{n}\,ds; \quad \int_\Omega T_{ij,j}dv = \int_{\partial\Omega} T_{ij}n_j ds$$

o*ù* $\underline{n}$ est le champ de vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$.

Trés important dans le calcul pratique en mécanique, ce théorème peut s'énoncer aussi de la manière symbolique et synthétique suivante :

$$\int_\Omega \bullet_{,i}dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i ds$$

o*ù* le point $\bullet$ peut *ê*tre remplacé par n'importe quelle composante de tenseur. Les théorèmes de la divergence permettent un va-et-vient entre volume et surface d'une région de l'espace. Ce point joue un r*ô*le essentiel dans la représentation des efforts en mécanique.

On a donné les expressions intrinsèques de ces théorèmes ainsi que leur traduction en composantes cartésiennes orthonormées. Certains de ces théorèmes sont attribués à Stokes, Gauss, Ostrogradski, voire d'autres dénominations.

Théorème 0.2 ***(Théorème de Gauss-Ostrogradski)***
Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^3$ (fermée, bornée et régulière) limité par une surface fermée S orientée vers l'extérieur de Ω et soit $\underline{V}$ un champ de vecteurs. Alors l'intégrale de la divergence de $\underline{V}$ dans Ω est égale au flux de V à travers S, c'est-à-dire

$$\int\int\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{V} dxdydz = \int\int_{S} \underline{V} \cdot \underline{n} ds \tag{0.66}$$