Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Fiche de TD 2(2019/2020)

"Les équations différentielles."

Exercice 01

Résoudre les équations différentielles du 1er ordre à variables séparables suivantes :

1. $xy - y' = 0$; 2.$(1 + x^2)dy = ydx$; 3. $(x^2 + 2)y' + 2xy = 0$; ④. $y' - ye^x = 0$

Exercice 02

Résoudre les équations différentielles du 1er ordre suivantes :

1. $y' - y = e^x$ 2. $y' + \frac{y}{x} = \ln(x)$; 3.$y' + 2y = 1$; ④. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Exercice 03

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = xy^2$, 2. $y' + y = y^3e^{3x}$; ③.$y' + \frac{1}{x}y = -y^2 \ln x$

Exercice 04 I)Résoudre les équations différentielles linéaires du 2ème ordre suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 0$, 2. $y'' + 2y' + y = 0$, 3. $y'' - y' + y = 0$, ④$y'' + y = 0$,
5. $y'' + 2y' + y = xe^x$, 6.$y'' - y' - 2y = e^{2x}$ 7.$y'' + y = 2e^x + \cos(x)$, ⑧. $y'' + y = e^x$.

II)[**Exercice supplémentaires**] Donner l'expression des solutions particulières :

1. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$; 2.$y'' - 2y' + y = xe^x$, 3. $y'' + y = x^2e^x \sin(x)$;
4. $.y'' + 2y' + y = e^x + \sin(x)$; 5.$y'' + 4y = (x^2 + 1)e^x + e^{2x}\cos(x)$.

UTILE :

$f(x)$	Racines de l'équation caractéristique (E_r)	Solution particulière
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α n'est pas une solution (E_r)	$y_p = \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^{\omega}\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$\alpha \pm i\beta$ n'est pas une solution (E_r)	$y_p = e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$ Avec $k \max n, m$	$\alpha \pm i\beta$ est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x\omega e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$

Avec $P_n(x), \tilde{P}_n(x)$ sont polynôme de degré n et $Q_m(x), \tilde{Q}_m(x)$ sont polynôme de degré m.

Bon courage!

Dr. I.Medjadj

Faculté de chimie L1 Maths2
Solution de la Fiche de TD 2(2019/2020)L1 Chimie

Exercice 01
Résoudre les équations différentielles du 1er ordre à variables séparables suivantes :

1. $xy - y' = 0 \Leftrightarrow y' = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx$
   On intégre : $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = ke^{\frac{x^2}{2}}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}$.
2. $(1+x^2)dy = ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = arctg(x) + c \Rightarrow y = ke^{arctg(x)}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}$.
3. $(x^2+2)y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x^2+2)\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{x^2+2} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x^2+2| + c, c \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow y = \frac{k}{x^2+2}$.

Exercice 02
Résoudre les équations différentielles du 1er ordre suivantes :

1. $(E) : y' - y = e^x$ on résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène : $(E_h) : y' - y = 0$ on a :
   $$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow y = Ke^x, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$
   On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose :
   $$y(x) = k(x)e^x \Rightarrow y' = k'(x)e^x + k(x)e^x.$$
   En remplaçant dans (E) on aura :
   $$y' - y = k'(x)e^x = e^x \Rightarrow k(x) = x.$$
   Ainsi la solution particulière est donc donnée par :$y_p(x) = xe^x$ et la solution générale est :
   $$y = ke^x + xe^x.$$
2. $(E) : y' + \frac{y}{x} = \ln(x)$;on résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène :
   $(E_h) : y' + \frac{y}{x} = 0$ on a :
   $$\frac{dy}{dx} = -y/x \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + c \Rightarrow y = \frac{K}{x}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$
   On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$ En remplaçant dans (E) on aura :
   $$y' - \frac{y}{x} = \frac{k'(x)}{x} = \ln(x) + c \Rightarrow k(x) = \int x\ln(x)dx.$$
   En utilisant l'intégration par parties on a :$k(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$ Ainsi la solution particulière est donc donnée par : $y_p(x) = \frac{1}{x}[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}]$ et la solution générale est :
   $$y = \frac{k}{x} + \frac{x}{2}\ln(x) - \frac{x}{4}.$$

3.$(E) : y' + 2y = 1$; résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène :
$(E_h) : y' + 2y = 0$ on a :

$$\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \ln|y| = -2x + c \Rightarrow y = Ke^{-2x}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = k(x)e^{-2x} \Rightarrow y' = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$ En remplaçant dans (E) on aura :

$$y' + 2y = k'(x)e^{-2x} = 1 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Ainsi la solution particulière est donc donnée par :$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2x} = \frac{1}{2}$ et la solution générale est :

$$y = ke^{-2x} + \frac{1}{2}.$$