Les séries chronologiques :

$X = f(t),\ t{:}\, temps$, t=1,2,3…,n , X= $x_1, x_2,…, x_n$

Pour l'étude d'une série chronologique on s'intéresse à 2 modèles (tendances) qui sont le modèle linéaire ($X(t) = a_0 + a_1 t$) et le modèle exponentiel $X(t) = a^t . b$.

Le choix entre les deux modèles est definit par les valeurs de la serie $[X(t) - X(t-1)]$ et $[X(t)/X(t-1)]$.

1. Si $X(t) - X(t-1)]$ est constant =c donc :

$$X(t) = c + X(t-1) = c + c + X(t-2) = c + c + c + X(t-3) = \cdots = X(0) + t.c = a_0 + t\ a_1$$

2. Si $[X(t)/X(t-1)]$ = a est constant donc :

$$X(t) = aX(t-1) = a^2X(t-2) = \cdots = a^t.X(0) = a^t.b$$

Si $X(t) = a^t.b \Rightarrow \ln\big(X(t)\big) = \ln(b) + \ln(a)\,.\,t \Longrightarrow$ Linéaire

Exemple :

Trimestre	1	2	3	4	5	6
Quantité vendue	255	330	435	570	740	960

- Evolution des ventes d'un produit prévisions pour trimestres 7 et 8.

t	X(t)	X(t)-X(t-1)	X(t)/X(t-1)
1	255	-	-
2	330	75	1.29
3	435	105	1.32
4	570	135	1.31
5	740	170	1.30
6	960	220	1.30

Donc Modèle exponentiel

$$X(t) = a^t b$$

$$Y(t) = \ln\big(X(t)\big) = \ln(b) + t.\ln(a) \Rightarrow Y = At + B$$

t	Y=ln(X)
1	5.64
2	5.8
3	6.08
4	6.35
5	6.61
6	6.87

$$A = \frac{cov(Y,t)}{var(t)} = \frac{0.775}{2.92} = 0.265 \implies a = e^{0.265} = 1.3$$

$$B = \overline{Y} - A\overline{t} = 5.28 \implies b = e^{5.28} = 197$$

$$\Rightarrow X(t) = 1.3^{t}.197$$

Prévision :

$X(7) = 1.3^{7}.197$= 1236

$X(8) = 1.3^{8}.197$=1607

- **Séries chronologiques avec composantes saisonnières :**

Dans le cas d'une influence des saisons (saison = période des relevés). La série doit être lissée (élimination de la composante principale) avec une moyenne mobile dont l'ordre est égal au nombre de saisons.

Définition du modèle :

Le modèle s'écrit : $$\begin{cases} Y(t) = \begin{cases} X(t) + S(t)\ modele\ additif \\ X(t) * S(t)\ modele\ multiplicatif \end{cases} \\ S(1) = \cdots \\ S(2) = \cdots \\ S(T) = \cdots \end{cases}$$

Remarque :

Le modèle choisi pour la composante saisonnière est indépendant de la tendance de la série chronologique. On peut avoir un modèle additif pour une tendance (X(t)) exponentielle ou linéaire et la même chose pour le modèle multiplicatif avec les conditions suivantes sur les composantes saisonnières :

Pour le modèle additif :

$$\sum_{t=1}^{t} S(t) = 0$$

Pour le modèle multiplicatif :

$$\sum_{t=1}^{t} S(t) = T\ (Nombre\ de\ saisons)$$

- **Lissage** consiste en première étape, l'ordre de la moyenne mobile est égale au nombre de saisons.
  Ordre impair : $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{T}\ (Y(t - (\frac{T-1}{2})) + \cdots + Y(t) + \cdots + Y(t + \frac{T-1}{2}))}$

  Exp : T=3 , $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{3}[Y(t-1) + Y(t) + Y(t+1)]}$

Ordre pair : $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{T}\ (\frac{1}{2}Y(t-(\frac{T}{2})) + \cdots + Y(t) + \cdots + \frac{1}{2}Y(t+\frac{T}{2}))}$

Exp :

Ordre2 : T=2 , $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}Y(t-1) + Y(t) + \frac{1}{2}Y(t+1)]}$
Ordre4 : T=4 , $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}Y(t-2) + Y(t-1) + Y(t) + Y(t+1) + \frac{1}{2}Y(t+2)]}$

Exercice :
Les ventes semestrielles d'un article sont :

2023		2024		2025	
1 er semestre	2 -ème semestre	1 er semestre	2 -ème semestre	1 er semestre	2 -ème semestre
5	1	9	5	13	9

- Combien d'article seront vendu au 1er et 2 -ème semestre 2026 ?

1- Lissage :
2 saisons donc, $\boldsymbol{Z(t) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}Y(t-1) + Y(t) + \frac{1}{2}Y(t+1)]}$

t	1	2	3	4	5	6
Z(t)	-	2	3	4	5	-
Z(t)-Z(t-1)	-	-	1	1	1	-
Z(t)/Z(t-1)	-	-	1.5	1.33	1.25	-

Tendance linéaire Z(t)-Z(t-1)= 1 = constant

$$X(t) = at + b$$

$$a = \frac{cov(y,t)}{var(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(y_i - \overline{y})(t_i - \overline{t})}{\sum_{i=1}^{6}(t_i - \overline{t})^2} = \frac{26}{17.5} = 1.485 \backsimeq 1.5$$

$$b = \overline{y} - a\overline{t} = 7 - 1.5 * 3.5 = 1.75$$

$$X(t) = 1.5t + 1.75$$

Composante saisonnière : (On choisi un des modèles)

$$\boldsymbol{Y(t) = X(t) + S(t) \Longrightarrow D(t) = Y(t) - X(t)}$$

t	1	2	3	4	5	6
Y	5	1	9	5	13	9
X	3.25	4.75	6.25	7.75	9.25	10.75
D	1.75	-3.75	2.75	-2.75	3.75	-1.75

$$S(1) = \frac{1.75 + 2.75 + 3.75}{3} = 2.75$$

$$S(2) = \frac{-3.75 - 2.75 - 1.75}{3} = -2.75$$

Avec $S(1) + S(2) = 0$

Le modèle :

$Y(t) = X(t) + S(t)$

Avec $\begin{cases} X(t) = 1.75 + 1.5t \\ S(t) = S(t+2) \ \ (periodique) \\ S(1) = 2.75 \\ S(2) = -2.75 \end{cases}$

Prévision :

Premier semestre 2025, t=7

$Y(7) = X(7) + S(7) \qquad (S(7) = S(1))$

$Y(7) = 1.75 + 1.5 * 7 + 2.75 = \mathbf{15}$

Deuxième semestre 2025, t=8

$Y(8) = X(8) + S(8) = 1.75 + 8 * 1{,}5 - 2.75 = \mathbf{11}$

Remarque :

Si S(1)= 2.75 et S(2)=-2.65 **, on ajuste** S(1)=2.7 (-0.5) et S(2)=-2.7 (+0.5)

Si S(1)=2.75 et S(2)=-2.72 , on peut faire S(1)=2.75 et S(2)=-2.75