

**Exercice 1 : (cours) (6 points)**

Soient les données suivantes :

$X_1$	0	1	1	3	3	4
$X_2$	0	1	2	1	3	4

$$R = 4, \quad S =$$

	1	
	<u>1</u>	1
	1	

- Déterminer  $X \oplus S$ ,  $X \ominus S$ ,  $X \circ S$ ,  $X \cdot S$  (les opérations de la morphologie mathématique : dilatation, érosion, ouverture et fermeture). (Compléter les résultats sur les tableaux ci-dessous)

$X \oplus S$						$X \ominus S = \emptyset$						$X \circ S = \emptyset$						$X \cdot S$					
				1	1																		
		1			1																	1	
		1	1	1															1				
1	1		1	1	1														1		1		
1	1			1																			

La représentation de nuage de point en rouge (1 points), dilatation (1.5 pts), l'ouverture (1pts) et érosion (1 pts), fermeture (1.5 pts)

**Exercice 2: (7 points)**

Soit l'échantillon:

	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
X	1	2	7	3	4	8
Y	1	2	6	6	4	7

- Trouver une classification en trois classes en utilisant le K-means avec les centres suivants :

$$\bullet L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Quelle est la classe la plus excentrique ?

**Kmeans :****Etape 1 :**

$d^2$	$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$L_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$L_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$
$I_1$	0	8	72
$I_2$	2	2	50
$I_3$	61	25	1
$I_4$	29	9	17
$I_5$	18	2	18
$I_6$			1

(1.25 pts)

$$W = 0+2+9+2+1+1 = 15 \text{ (1 pts)}$$

$$C_1 = \{I_1, I_2\}, C_2 = \{I_4, I_5\}, C_3 = \{I_3, I_6\} \text{ (0.5 pts)}$$

**Etape 2 :**

$d^2$	$L_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$L_2 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$L_3 = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}$
$I_1$	0.5	22.25	72.5
$I_2$	0.5	11.25	50.5
$I_3$	50.5		0.5
$I_4$	22.5	1.25	
$I_5$		1.25	
$I_6$			0.5

(1.25 pts)

$$W = 0.5 + 0.5 + 1.25 + 1.25 + 0.5 + 0.5 = 4.5 \text{ (1 pts)}$$

$$C_1 = \{I_1, I_2\}, C_2 = \{I_4, I_5\}, C_3 = \{I_3, I_6\} \text{ (0.5 pts)}$$

La classe la plus excentrique :

$$\rho_c = d^2(g_c, g), \quad g = \begin{pmatrix} 4.17 \\ 4.33 \end{pmatrix}, \quad \rho_{c1} = 15.13, \rho_{c2} = 0.45, \rho_{c3} = 15.8 \text{ (1 pts)}$$

La classe 3 est la classe la plus excentrique (on peut considérer la classe 1 aussi) (0.5 pts)

**Exercice 3 : (7 points)**

La vente trimestrielle d'un article est présentée par le tableau suivant :

2024		2025	
3-ème trimestre	4-ème trimestre	1 er trimestre	2-ème trimestre
392	780	1551	3087

- Ajuster aux données une courbe de régression (sans composante saisonnière)
- Donner une prévision des ventes du 1 er trimestre 2026.

1.

t	X(t)	X(t)-X(t-1)	X(t)/X(t-1)
1	392	-	-
2	780	388	1.99
3	1551	771	1.99
4	3087	1536	1.99

(1 pts)

Donc Modèle exponentiel

$$X(t) = a^t b$$

$$Y(t) = \ln(X(t)) = \ln(b) + t \cdot \ln(a) \Rightarrow Y = At + B$$

(1 pts)

t	Y=ln(X)	$Y - \bar{Y}$	$t - \bar{t}$	$(Y - \bar{Y}) * (t - \bar{t})$
1	5.97	-1.03	-1.5	1.55
2	6.66	-0.34	-0.5	0.17
3	7.35	0.35	0.5	0.17
4	8.03	1.03	1.5	1.55

(1 pts)

$$\bar{Y} = 7, \bar{t} = 2.5$$

$$A = \frac{\text{cov}(Y,t)}{\text{var}(t)} = \frac{3.44}{5} = 0.69 \Rightarrow a = e^{0.69} = 1.99 \text{ (1 pts)}$$

$$B = \bar{Y} - A\bar{t} = 7 - 0.69 * 2.5 \Rightarrow b = e^{5.28} = 196 \text{ (1 pts)}$$

$$\Rightarrow X(t) = 1.99^t \cdot 196 \text{ (1 pts)}$$

**Prévision :**

**1 er trimestre 2026 correspond a t=7**

$$X(7) = 1.99^7 \cdot 196 = 24222 \text{ articles (1 pts)}$$