Filière Electrotechnique



MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES

(Cours et Exercices)

Destiné aux étudiants, première année Master, option : Machines électriques selon le programme officiel.

Dr. BOUNADJA Elhadj
Maitre de conférences « B »
Email : e.bounadja@univ-chlef.dz/hbounadja@yahoo.fr

Année : 2018/2019

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS i

CHAPITRE I : PROCEDES PHYSIQUES ET MATHEMATIQUES D'ETUDES

I.1 Rappels sur les circuits couplés magnétiquement …… 1
I.1.1 Flux magnétique…… 1
I.1.2 F.E.M induite dans un circuit…… 2
I.1.3 Reluctance d'un circuit magnétique…… 4
I.1.4 Circuits couplés linéaires, diverses inductances…… 5
I.2 Conversion électromécanique de l'énergie…… 10
I.2.1 Conservation de l'énergie…… 12
I.2.2 Expression du couple électromagnétique…… 15
I.3 Inductance de la machine…… 17
I.4 Composantes symétriques et relatives…… 19
I.4.1 Généralités sur les transformations des systèmes triphasés…… 19
I.4.2. Composantes symétriques…… 21
I.4.3 Composantes relatives…… 24
1.5 Exercices…… 26

CHAPITRE II : THEORIE DE LA MACHINE ELECTRIQUE GENERALISEE

II.1 Machine électrique idéalisée …… 28
II.2 Machine électrique généralisée dans le repère naturel …… 29
II.2.1. Modèle triphasé de la machine généralisée …… 29
II.2.2. Modèle biphasé de la machine électrique généralisée…… 31
II.3 Passage d'un système triphasé au système biphasé et inversement…… 34
II.3.1 Application de la transformation de Park au système réel *abc*…… 34
II.3.2 Choix du référentiel …… 36
II.4 Machine électrique généralisée sous forme complexe…… 37
II.5 Equation du mouvement de la machine électrique…… 38
II.6 Exercices…… 41

CHAPITRE III : MODELISATION DES MACHINES A COURANT CONTINU

III.1 Modèle de la machine à courant continu sur les axes *d,q*…… 43
III.1.1 Equation des tensions …… 44
III.1.2 Equation des flux …… 44
III.1.3 Expression du couple électromagnétique…… 45
III.1.4 Equation du mouvement…… 46
III.2 Application de la théorie généralisée aux divers modes d'excitation…… 46
III.2.1. Fonctionnement en Moteur…… 46
III.2.2. Fonctionnement en Génératrice…… 48
III.3 Exercices…… 50

CHAPITRE IV : MODELISATION DES MACHINES ASYNCHRONES

IV.1 Modèle de la machine asynchrone triphasée linéaire ……..... 54
IV.1.1 Equations générales de la machine asynchrone idéalisée……...……. 54
IV.1.2 Modèle de Park de la machine asynchrone triphasée ……..…. 57
IV.2 Modèle de la machine asynchrone triphasée saturée……..... 59
IV.2.1 Equations des flux.…….…….……. 61
IV.2.2 Equations des tensions……..…… 66
IV.2.3 Modélisation de la caractéristique magnétique…… 67
IV.3 Modèle des moteurs asynchrones monophasés à condensateur permanent..... 68
IV.3.1 Modèle réel du moteur monophasé à condensateur permanent…… 69
IV.3.2 Modèle de Park du moteur monophasé à condensateur permanent……..... 72
IV.4 Exercices..…...…….…..…….……... 76

CHAPITRE V : MODELISATION DES MACHINES SYNCHRONES

V.1 Modélisation des moteurs synchrones sans amortisseurs ……..... 80
V.1. 1 Modèle de la machine synchrone sans amortisseurs dans le repère *abc*.…..…..…..…. 80
V.1.2 Modèle de Park de la machine synchrone sans amortisseurs …… 83
V.2 Modélisation des moteurs synchrones avec amortisseurs……..…….…..... 85
V.2.1 Modèle réel des moteurs synchrones avec amortisseurs ...….....…….…….. 86
V.2.2 Modèle de Park de la machine synchrone avec amortisseurs…….. 88
V.3 Modélisation des génératrices synchrones sans amortisseurs ……..... 90
V.4. Exercices..….....…….…….……..…..…… 93

AVANT-PROPOS

Les machines électriques occupent désormais un vaste espace de la vie sociale, tant dans la vie professionnelle et industrielle, que dans la vie quotidienne et familiale. On a vu apparaître ces machines de façon massive dans les transports guidés, trains, métros et TGV. La première génération de ces trains à grande vitesse a utilisé des moteurs à courant continu, la deuxième a eu recours à des moteurs synchrones autopilotés associés à des convertisseurs à thyristors, la troisième s'est emparé des moteurs asynchrones à contrôle vectoriel associé à des onduleurs à GTO. On conçoit tous les jours des moteurs pour de nouvelles applications, et tous ces moteurs doivent être commandés.

Les commandes modernes n'ont réellement pu s'imposer que lorsque l'on a disposé de la puissance de calculs en temps réel des microprocesseurs et des processeurs de traitement de signaux (DSP). On pouvait enfin concevoir des algorithmes de commande complexe, implantables, basés sur une connaissance fine des modèles des machines électriques.

Avec le concept de modèle, on arrive au cœur du projet de cette polycopie. Ce terme recouvre en pratique des démarches très générales. Pendant longtemps, la communauté du génie électrique a particularisé ce terme pour la modélisation des systèmes électromagnétiques en vue de la commande. Or, la modélisation est une activité scientifique qui est à la fois très générale, mais qui a des buts à chaque fois très particuliers. Cette connaissance est matérialisée par des modèles. Ce sont eux qui font l'objet du présent recueil.

Ce document s’adresse aux étudiants de la formation Master en électrotechnique, option Machine électrique dans le cadre du programme officiel. Mais bien entendu il peut être utile par tous ceux qui désirent approfondir leurs connaissances ou avoir un document de base en matière de modélisation des machines électriques. On outre, ce cours a pour objectif principal d’approfondir les connaissances des étudiants sur les différents modèles mathématiques dédiés à l’étude du comportement dynamique des machines électriques.

Ce recueil comprend cinq chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre, «Procédés physiques et mathématiques d’études », s'intéresse aux rappels sur les circuits couplés magnétiquement, conversion électromécanique de l’énergie, inductances de la machine et les composantes symétriques et relatives. L'autre extrémité de l'éventail de la modélisation est présentée par le second chapitre, «Théorie de la machine électrique généralisée», qui donne un panorama de modèles : modèle de la machine électrique idéalisée, modèle triphasé et biphasé de la machine généralisée ainsi que le modèle

complexe. On présente aussi, dans ce chapitre, l'équation de mouvement de la machine généralisée.

Les trois autres chapitres de ce recueil ont pour ambition de détailler les outils classiquement utilisés pour modéliser en régime dynamique les machines à courant continu, les machines synchrones et les machines asynchrones. Les modélisations présentées dans ces chapitres sont considérées comme classiques, mais elles ont l'ambition d'ouvrir vers des modélisations moins classiques ; par ailleurs, ce sont elles qui sont à la base de la grande majorité des commandes modernes de machines. Cela signifie que l'on présente en priorité les hypothèses physiques qui sont à la base des équations utilisées par toute la communauté d'électrotechnique.

Il doit savoir que des phénomènes physiques sont habituellement négligés par les modèles classiques : l'hypothèse de linéarité signifie, principalement, que l'on néglige la saturation des matériaux magnétiques, mais aussi l'effet de peau, les pertes ferromagnétiques (et tout ce qui pourrait trop compliquer le modèle : on fait donc, en fait, toutes les hypothèses pour rester dans un cadre considéré comme simple) ; l'hypothèse du premier harmonique signifie que l'on suppose que les champs dans l'entrefer ont une distribution sinusoïdale et que l'on néglige donc les harmoniques d'espace et les effets des encoches ; la symétrie signifie que toutes les phases d'une armature (stator, rotor) sont identiques et simplement décalées dans l'espace et que l'on néglige les défauts qui pourraient apparaître lors de la construction ou lors d'un accident.

J'espère que ce recueil sera apprécié par mes collègues enseignant et nos étudiants, je serais très heureux de recevoir avec reconnaissance leurs remarques, critiques et suggestions.

Dr. BOUNADJA Elhadj
Maitre de conférences « B »
Email : e.bounadja@univ-chlef.dz/hbounadja@yahoo.fr

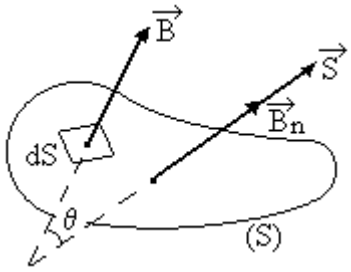
CHAPITRE I :

PROCEDES PHYSIQUES ET MATHEMATIQUES D'ETUDE

I.1 Rappels sur les circuits couplés magnétiquement

I.1.1. Flux magnétique

Une quantité importante qui intervient constamment dans l'étude des machines électriques est le "***flux Magnétique***" ou encore le "***flux d'induction***" à travers une surface.



Soit une surface (S) placée dans un champ magnétique d'induction $\vec{B}$ (*Fig. I.1*). Le flux élémentaire $d\vec{B}$ à travers la surface $d\vec{S}$ est donné par:

Fig. I.1 : Flux magnétique.

$$d\phi = \vec{B}.d\vec{S} \tag{I.1}$$

Le flux total à travers la surface *S* est donc:

$$\phi = \iint_S \vec{B}d\vec{S} \tag{I.2}$$

Si le circuit est uniforme, la définition du flux soit :

$$\phi = \vec{B}.\vec{S} = B.S\cos(\theta) = B_n S \tag{I.3}$$

Avec:

B_n Composante normale de $\vec{B}$ sur le vecteur axial $\vec{S}$ de la surface *S*.

Dans le cas où $\vec{B} // \vec{S}$, il vient :

$$\phi = B.S \quad \text{[Wb]} \tag{I.4}$$

Remarquons qu'un flux à travers un circuit peut résulter de la circulation d'un courant dans ce circuit, il s'appelle "flux propre". En électrotechnique, on pourra fréquemment supposer que l'espace est limité à une région connue qui s'appelle "tube de champ" (ou tube d'induction): aucune ligne d'induction n'entre dans le tube et aucune ligne n'en sort (Fig. I.2). Ceci représente des noyaux ou carcasses ferromagnétique et leurs entrefers. Le flux se conserve dans cette région et que les circuits n'envoient pratiquement pas de flux dans le reste de

l'espace, sauf le flux de fuite. La Figure 1.2 représente un circuit magnétique parfait, les lignes de champ sont canalisées et le champ magnétique est uniforme.

A l'intérieur d'un tube de champ le flux est constant quelles que soient les substances traversées (Fig. 1.3). On a donc:

$$\phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = Cte \tag{I.5}$$

Donc le module de l'induction magnétique B est inversement proportionnel à la section *S* du tube.

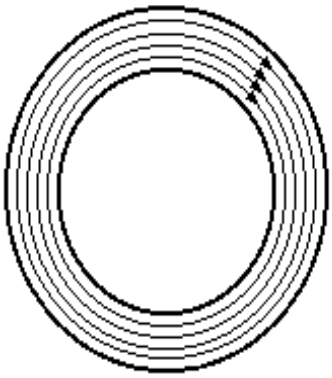


Fig. I.2 : Circuit magnétique parfait.

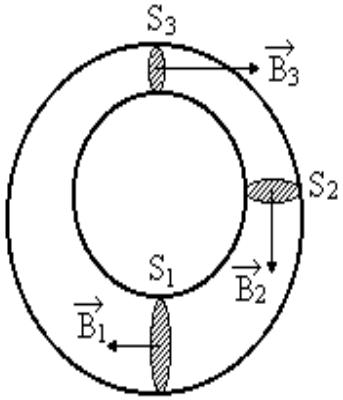


Fig. I.3 : Tube de champ.

.

I.1.2 F.E.M induite dans un circuit

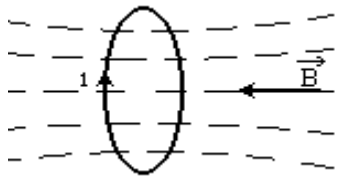
Tout circuit électrique traversé par un flux magnétique peut être le siège d'une tension à ses bornes. Si ce flux varie en fonction du temps, cette tension s'appelle "force électromotrice induite F.E.M".

La F.E.M. est égale et opposée à la vitesse de variation du flux du vecteur d'induction à travers un circuit *:*

$$e = -n\frac{d\phi}{dt} \tag{I.6}$$

Le module de la F.E.M. d'un circuit est égal à la dérivée par rapport au temps du flux qui le traverse, pour chaque spire du circuit. Si le flux qui traverse le circuit ne varie pas, il n'apparaît aucune tension induite. Le signe (-) dans la relation (I.6) rappelle que la F.E.M a un effet qui s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Cet effet d'opposition est précisé par la *loi de Lenz*, qui concerne le courant induit.

- **F.E.M. de self induction ou auto induction**



Considérons un seul circuit parcouru par un courant *i* (Fig. I.4). Ce courant crée en tout point de l'espace une induction *B* qui est proportionnelle à *i*. Le circuit est donc traversé par un flux proportionnel à *i*:

$$\phi = Li \tag{I.7}$$

Fig. I.4 Flux propre.

Le coefficient de proportionnalité *L* est appelé "***inductance propre***" (ou auto inductance ou self inductance). Il ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit et s'exprime en "Henry", symbole [H].

Cas particulier: Un solénoïde (bobine) de section S, de longueur *l*, comportant *n* spires, a une inductance propre égale à:

$$L = \mu_0 S \frac{n^2}{l} \tag{I.8}$$

Si le flux varie dans le temps parce que *i* varie, le circuit est le siège d'une F.E.M. de self induction et s'exprime sous la forme:

$$e = L\frac{di}{dt} \tag{I.9}$$

- **F.E.M. de mutuelle induction**

Soient deux circuits C_1 et C_2 fixes l'un par rapport à l'autre (Fig. I.5). Si seul C_1 est parcouru par un courant i_1, il crée en tout point de l'espace une induction $\vec{B}$, et en particulier au voisinage de C_2, qui est alors traversé par un flux ϕ_{12} proportionnel à $\vec{B}_1$, or $\vec{B}_2$ est proportionnelle à i_1, d'où:

$$\phi_{12} = L_{12} i_1 \tag{I.10}$$

De même, si seul le circuit C_2 est parcouru par un courant i_2, le flux envoyé par le circuit C_2 dans C_1 est:

$$\phi_{21} = L_{21} i_2 \tag{I.11}$$

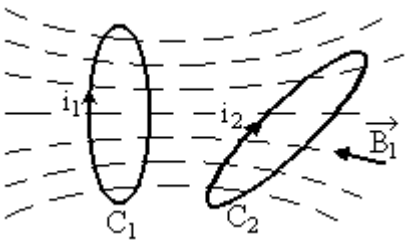


Fig. I.5 Flux mutuel

Les coefficients L_{12} et L_{21} ne dépendent évidemment que des caractéristiques géométriques des deux circuits: surfaces, nombres de spires, orientation, nature du milieu.

On a donc

$$L_{12} = L_{21} = M \tag{I.12}$$

M est appelée "***inductance Mutuelle***" des deux circuits et s'exprime en Henry [H].

Lorsque les deux circuits C_1 et C_2 sont parcourus par des courants i_1 et i_2, le circuit C_1 est traversé par le flux:

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \tag{I.13}$$

Si ce flux varie parce que i_1 et i_2 varient, le circuit C_1 est le siège d'une F.E.M. induite de valeur:

$$e = \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e_s + e_m \tag{I.14}$$

e_S représente la F.E.M. de self induction et e_m représente F.E.M. d'induction mutuelle produite dans C_1 par C_2,

Remarque : Si on a un circuit à *n* spires, on définit parfois le *flux totalisé :*

$$\psi = n\phi \tag{I.15}$$

I.1.3. Reluctance d'un circuit magnétique

Dans les noyaux des circuits magnétiques, il est commode d'exprimer la loi d'Ampère sous une forme faisant intervenir directement le flux. Le long d'une ligne d'induction *B,* le théorème d'Ampère s'écrit:

$$\oint_{\Gamma} H dl = ni \tag{I.16}$$

En faisant intervenir dans cette relation l'expression $B = \mu H$ et l'expression du flux $\phi = BS$, on obtient:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dl}{\mu S} \phi = ni \tag{I.17}$$

Si on suppose que le flux est conservatif, on a:

$$\phi \oint_{\Gamma} \frac{dl}{\mu S} = ni \tag{I.18}$$

Soit :

$$R\phi = ni = F \tag{I.19}$$

Avec :

$$R = \oint_{\Gamma} \frac{dl}{\mu S} \tag{I.20}$$

La relation (I.19) est appelée relation d'HOPKINSON. La relation (I.20) exprime la réluctance du circuit magnétique. C'est une quantité qui caractérise la géométrie du noyau (longueur *l* et section *S*) et ses aptitudes à capter un champ magnétique (perméabilité μ). En Système International, la réluctance n'a pas reçu de nom d'unité. Mais compte tenu de la relation (I.19), on peut la mesurer en [*At*/*Wb*]. Si on considère un circuit magnétique homogène de section constante, sa réluctance vaut:

$$R = \frac{l}{\mu s} \tag{I.21}$$

I.1.4 Circuits couplés linéaires, diverses inductances

D'une façon générale, on peut considérer toutes les machines électriques comme des "circuits couplés", c'est à dire des ensembles de bobinages (inducteur et induit) parcourus par des courants ayant un circuit magnétique commun et dont la géométrie peut varier. On suppose que le couplage soit linéaire, c'est à dire que les flux soient proportionnels aux courants.

- **Composantes des flux**

Considérons deux circuits électriques, couplés de façon quelconque (Fig. I.6), comportant respectivement n_1 et n_2 spires parcourues par des courants i_1 et i_2 et désignant par ϕ_1 et ϕ_2 les flux produit par ces circuits.

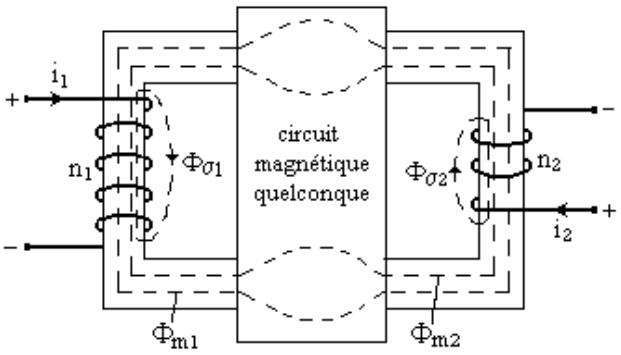


Fig. I.6 Couplage magnétique.

Le flux ϕ_1 est constitué en général d'une partie ϕ_{m1} qui traverse le circuit 2, et d'une partie $\phi_{\sigma 1}$ qui ne traverse pas le circuit 2. Il en est de même pour le flux ϕ_2 produit par le circuit 2. On a donc:

$$\phi_1 = \phi_{m1} + \phi_{\sigma 1} \tag{I.22}$$

$$\phi_2 = \phi_{m2} + \phi_{\sigma 2} \tag{I.23}$$

On voit que le flux mutuel, défini comme le flux commun qui traverse les deux circuits à la fois, vaut:

$$\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2} \tag{I.24}$$

On voit également que les flux qui traversent respectivement les circuits 1 et 2 sont constitués du flux qu'ils produisent eux-mêmes ϕ_1 ou ϕ_2 et d'une partie du flux produit par l'autre circuit ϕ_{m1} ou ϕ_{m2}. On a donc:

$$\phi_{1t} = \phi_1 + \phi_{m2} \tag{I.25}$$

$$\phi_{2t} = \phi_2 + \phi_{m1} \tag{I.26}$$

Φ_{1t} et Φ_{2t} représentent les flux totaux qui traversent respectivement les circuits 1 et 2.

Ou encore

$$\varphi_{1t} = \phi_{\sigma 1} + \phi_m \tag{I.27}$$

$$\phi_{2t} = \phi_{\sigma 2} + \phi_m \tag{I.28}$$

- **Inductances de deux circuits couplés**

Les flux totaux à travers les enroulements sont:

$$\psi_1 = n_1 \phi_{1t} = n_1 \phi_{\sigma_1} + n_1 \phi_m \tag{I.29}$$

$$\psi_2 = n_2 \phi_{2t} = n_2 \phi_{\sigma_2} + n_2 \phi_m \tag{I.30}$$

Pour deux circuits couplés, on définit les huit inductances suivantes, en fonction des flux définis au paragraphe précédant.

- Les inductances de magnétisation, ou inductances principales, L_{m1} et L_{m2}:

$$L_{m1} = n_1 \frac{\phi_{m1}}{i_1} \tag{I.31}$$

$$L_{m2} = n_2 \frac{\phi_{m2}}{i_2} \tag{I.32}$$

- Les inductances de fuites $L_{\sigma 1}$, $L_{\sigma 2}$ valent respectivement:

$$L_{\sigma 1} = n_1 \frac{\phi_{\sigma 1}}{i_1} \tag{I.33}$$

$$L_{\sigma 2} = n_1 \frac{\phi_{\sigma 2}}{i_1} \tag{I.34}$$

- Les inductances propres L_1 et L_2 sont définies comme:

$$L_1 = n_1 \frac{\phi_1}{i_1} \tag{I.35}$$

$$L_2 = n_2 \frac{\phi_2}{i_2} \tag{I.36}$$

C'est-à-dire :

$$L_1 = L_{m1} + L_{\sigma 1} \tag{I.37}$$

$$L_2 = L_{m2} + L_{\sigma 2} \tag{I.38}$$

- Les inductances mutuelles:

$$L_{12} = n_1 \frac{\phi_{m2}}{i_2} \tag{I.39}$$

$$L_{21} = n_2 \frac{\phi_{m1}}{i_1} \tag{I.40}$$

Dans les relations (I.39) et (I.40) il n'est pas évident que les inductances mutuelles L_{12} et L_{21} sont égales, mais le circuit magnétique représente à chaque instant une réluctance R_m au passage du flux commun ϕ_m, ou une perméance Λ_m. Appliquant le théorème d'Ampère au champ H_1 qui serait crée par le courant i_1 seul ($i_2 = 0$ et $\phi_{m2} = 0$):

$$n_1 i_1 = H_1 l_m = R_m \phi_{m1} \tag{I.41}$$

De la même façon, on applique le théorème d'Ampère avec $i_1=0$.

$$n_2 i_2 = H_2 l_m = R_m \phi_{m2} \tag{I.42}$$

On obtient donc

$$\phi_{m1} = \Lambda_m n_1 i_1 \tag{I.43}$$

$$\phi_{m2} = \Lambda_m n_2 i_2 \tag{I.44}$$

D'après les relations (I.39), (I.40), (I.43) et (I.44), on aura:

$$L_{12} = L_{21} = M = \Lambda_m n_1 n_2 \tag{I.45}$$

On retrouve ainsi les relations classiques des circuits couplés:

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \tag{I.46}$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \tag{I.47}$$

En notation matricielle, on écrit:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{I.48}$$

- **Facteurs de couplage et de dispersion**

Il est utile d'introduire dans la théorie des circuits linéaires couplés deux facteurs *k* et σ appelés respectivement " ***facteur de couplage*** " et " ***facteur de dispersion*** ", qui caractérisent les échanges mutuels de flux entre les circuits. Le cas idéal serait que le flux mutuel ϕ_m serait égal à $\phi_1 + \phi_2$ et il peut être intéressent de savoir de combien on s'éloigne de ce cas idéal.
On définit également, pour chaque circuit, le facteur de fuite de bobinage k_1 et k_2, comme le rapport entre le flux utile (ou de magnétisation) et le flux total produit par le circuit. On a donc:

$$k_1 = \frac{\phi_{m1}}{\phi_1} = \frac{L_{m1}}{L_1} \tag{I.49}$$

$$k_2 = \frac{\phi_{m2}}{\phi_2} = \frac{L_{m2}}{L_2} \tag{I.50}$$

Le facteur de couplage *k* est défini comme la moyenne géométrique des facteurs de fuite de chaque circuit:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{L_{m1} L_{m2}}{L_1 L_2}} \tag{I.51}$$

En utilisant la relation (I.33), on obtient:

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{I.52}$$

On voit qu'on peut exprimer l'inductance mutuelle $L_{12} = L_{21}$ au moyen des inductances propres L_1 et L_2 et de ce facteur *k*.

$$L_{12} = L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{I.53}$$

Pour un transformateur le facteur de couplage est de l'ordre de 0,95 mais il est beaucoup plus faible pour un moteur asynchrone qui est de l'ordre de 0,60.

Le facteur de dispersion σ est défini par la relation suivante:

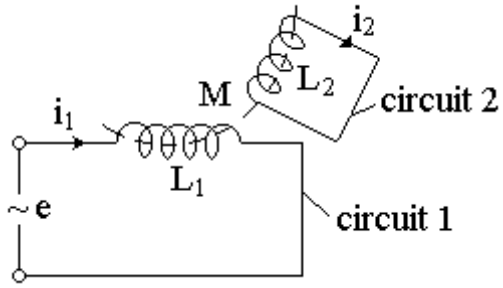
$$\sigma = \sqrt{1-k^2} \tag{I.54}$$

On peut l'exprimer en fonction des deux inductances propres et de l'inductance mutuelle:

$$\sigma = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \tag{I.55}$$

Pour un couplage parfait k = 1 et σ = 0.

Exemple



Considérons deux circuits bobinés de résistances négligeables, d'inductances propres et mutuelle L_1, L_2 et *M*, dont l'un est alimenté par une source alternative (circuit 1) et dont l'autre est en court-circuit (circuit 2) (Fig. I.7).

Fig. I.7 Exemple d'un couplage par dispersion.

Si le circuit 2 est suffisamment éloigné du circuit *1*, il n'y a pas d'influence mutuelle et la loi de Faraday s'écrit, pour le circuit *1*:

$$e = L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{I.56}$$

Mettons maintenant le circuit *2* à proximité du circuit 1, il y aura alors échange de flux entre les deux circuits et un courant i_2 sera induit dans le circuit *2*.

Les flux totaux qui traversent les circuits *1* et *2* sont:

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \tag{I.57}$$

$$\psi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \tag{I.58}$$

Les lois de Faraday s'écrivent alors:

$$e = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{I.59}$$

$$0 = \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \tag{I.60}$$

En éliminant i_2 entre les deux équations précédentes, on obtient:

$$e = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} \tag{I.61}$$

Soit, en introduisant le facteur de dispersion σ des deux circuits:

$$e = \sigma L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{I.62}$$

Cette équation montre l'effet de la présence du circuit 2 sur le circuit 1 est de modifier son inductance propre L_1, pour la transformer en σL_1. Cette inductance σL_1 s'appelle "***inductance de dispersion***" ou "***inductance de BOUCHEROT*** ".

$$L_{disp} = \sigma L_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \tag{I.63}$$

Elle joue un rôle important dans la théorie des moteurs à induction, à rotor en court-circuit.

I.2 Conversion électromécanique de l'énergie

D'une façon générale, une machine électrique produit un couple électromagnétique par l'intermédiaire de circuits électriques bobinés sur une même carcasse ferromagnétique, dont une partie est mobile. Dans ce cours, on s'intéresse qu'à la transformation réversible.

Energie électrique ↔ Energie mécanique

Un convertisseur électromécanique : est un dispositif destiné à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Cette conversion s'effectue par l'intermédiaire des circuits électriques et magnétiques.

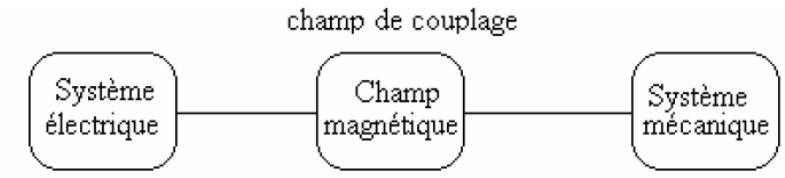


Fig. I.8 : Système électromécanique élémentaire.

On considère que le couple (ou force) résulte:

- Soit de l'action des champs produits par certains de ces circuits sur les courants qui parcourent les autres circuits.

- Soit des variations de l'énergie magnétique dans la carcasse lorsque la partie mobile varie.

Comme cette énergie est elle-même fonction des courants et des inductances des divers circuits, on considère que ce sont les variations des courants et des inductances qui produisent le couple.

Un convertisseur électromécanique est formé de parties mobiles les unes par rapport aux autres une d'elles au moins portant au moins un enroulement parcouru par un courant mais pouvant en porter plusieurs. Les autres parties peuvent être munies ou non de bobinages.

On se limite au cas où il n'y a que deux parties, l'une fixe, l'autre mobile.

Dans le cas où il n'y a qu'un enroulement parcouru par un courant le convertisseur constitue "un système à simple excitation ". Quand il y a deux enroulements, généralement l'un sur la partie mobile, l'autre sur la partie fixe, le convertisseur est "un système à double excitation".

On peut concevoir une multitude de mouvements relatifs possibles de la partie mobile, mais deux sont particulièrement intéressants:

- ✓ Si la partie mobile se déplace en translation, on l'appelle "l'armature" et la machine est un "transducteur magnétique" (Fig. I.9).
- ✓ Si la partie mobile se déplace en rotation, on l'appelle "rotor" et la machine est "une machine tournante", ou encore "un convertisseur rotatif" (Fig. I.10).

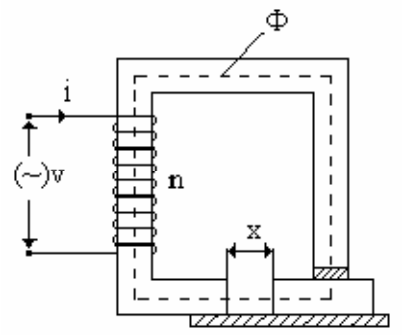


Fig. I.9 Transducteur magnétique.

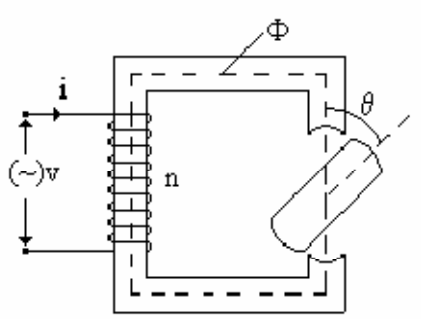


Fig. I.10 Convertisseur rotatif.

On peut établir les équations régissant le fonctionnement d'un convertisseur électromécanique de deux façons:

- En considérant l'action du champ produit par une partie sur les conducteurs de l'autre partie.

- En considérant les variations de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique lorsque la partie mobile se déplace.

C'est cette seconde façon de procéder, plus générale, que nous allons présenter.

I.2.1 Conservation de l'énergie

- **Relation énergétique dans un convertisseur électromécanique**

Un convertisseur électromécanique comprend un système électrique, un système mécanique et un milieu où ils peuvent réagir entre eux (champ de couplage). La conversion d'énergie électromécanique met en jeu 4 formes d'énergie :

- L'énergie électrique reçue(ou fournie) par le convertisseur électromécanique.
- L'énergie mécanique restituée (ou absorbée).
- L'énergie thermique due aux pertes et dissipée de façon irréversible en chaleur.
- L'énergie magnétique emmagasinée dans le champ de couplage.

L'énergie thermique correspond à des pertes de différentes natures dans les différentes composantes du système électromécanique:

- des pertes ohmiques affectant le système électrique du convertisseur;
- des pertes mécaniques, dues aux frottements, affectant le système mécanique;
- des pertes magnétiques (pertes par hystérésis et courant de Foucault) associées au champ de couplage et qui ont lieu dans les matériaux ferromagnétiques.

Dans un système quelconque, s'il n'y a pas de disparition de masse, on peut utiliser le principe de la conservation de l'énergie qui stipule que l'énergie n'est ni crée, ni détruite, elle ne fait que changer de forme.

Si W_E est l'énergie totale fournit par la source électrique et W_M est l'énergie totale fournit par la source mécanique, donc la distribution de l'énergie peut être exprimée par:

$$W_E = W_e + W_{pe} + W_{se} \quad (I.64)$$

$$W_M = W_m + W_{pm} + W_{sm} \quad (I.65)$$

Avec

W_{se} : l'accroissement de l'énergie électrique emmagasinée dans le système électrique;

W_{pe} : l'énergie dissipée en pertes électriques et pertes magnétiques;

W_e : transformée au champ de couplage par le système électrique (c'est cette énergie qui est transformée en énergie magnétique).

W_{sm} : l'énergie emmagasinée sous forme d'accroissement de l'énergie cinétique dans le système mécanique;

W_{pm} : l'énergie dissipée en pertes mécaniques;

W_m : l'énergie transformée au champ de couplage par le système mécanique (c'est cette énergie qui est transformée en énergie magnétique).

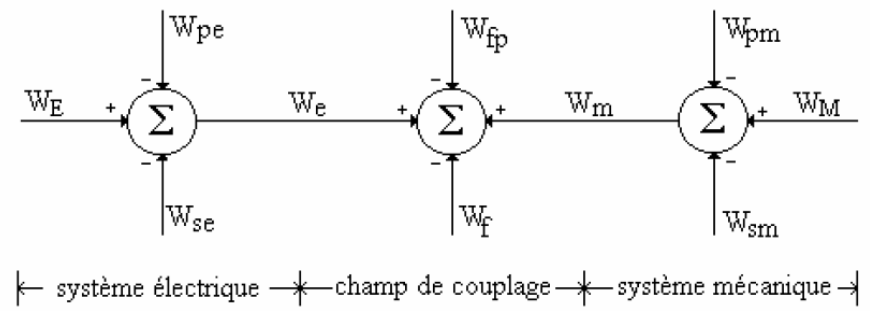


Fig. I.11 Conversion d'énergie.

Si W_F est l'énergie transformée au champ de couplage, on a:

$$W_F = W_f + W_{pf} \tag{I.66}$$

Avec :

W_f est l'énergie emmagasinée dans le champ de couplage sous forme d'énergie magnétique;

W_{pf} est l'énergie dissipée en pertes dans le champ de couplage sous forme de pertes magnétiques.

On a donc:

$$W_f + W_{pf} = W_e + W_m \tag{I.67}$$

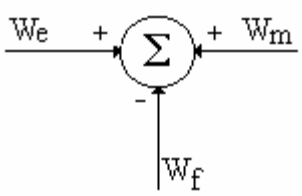


Fig. I.12 Conversion d'énergie.

Si les pertes du champ de couplage sont négligeables, le champ de couplage est conservatif et (I.69) devient:

$$W_f = W_e + W_m \tag{I.68}$$

Un convertisseur conservatif est convertisseur sans pertes et sans accumulation d'énergie mécanique.

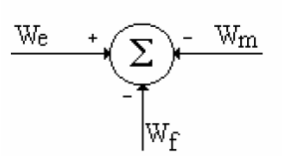


Fig. I-13 Conversion d'énergie électrique-mécanique.

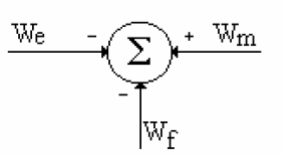


Fig. I-14 Conversion d'énergie mécanique-électrique.

Sous forme différentielle la relation (I.70) s'écrit:

$$dW_f = dW_e + dW_m \tag{I.69}$$

Avec :

dW_f : énergie emmagasinée dans le champ de couplage pendant l'intervalle de temps *dt*.

dW_e : énergie électrique fournit par le système électrique pendant l'intervalle de temps *dt* au champ de couplage.

dW_m: énergie mécanique fournit par le système mécanique pendant l'intervalle de temps *dt* au champ de couplage.

La relation (I.69) constitue l'équation de base pour la détermination des équations de fonctionnement des convertisseurs électromécaniques.

- **Energie magnétique emmagasinée et coénergie**

Pour évaluer l'énergie stockée W_f et voir à quoi elle correspond, on suppose que le système mécanique est fixe ($W_m = 0$). L'énergie électrique fournit au champ de couplage par le système électrique W_e est emmagasinée en totalité dans le champ de couplage.

$$W_f = W_e = \int e_f i dt \tag{I.70}$$

Avec : $e_f = \dfrac{d\psi}{dt}$

Donc :

$$W_f = \int i d\psi \tag{I.71}$$

Il n'y a aucun mouvement, le flux totalisé Ψ n'est fonction que de *i*. Cette fonction est représentée par la courbe de la figure I.16 (c'est la courbe de magnétisation B(H)).

Le flux totalisé Ψ dépend aussi:

- du nombre de spire N,
- de la configuration du circuit magnétique,
- des propriétés magnétiques des matériaux qui composent (perméabilité μ), de la position de la partie mécanique.

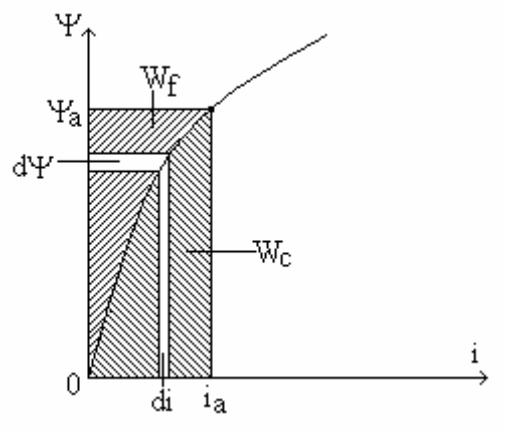


Fig. I.15 L'énergie emmagasinée et la coénergie

Dans la figure I.15, l'aire hachurée de gauche représente l'énergie emmagasinée dans le champ à l'instant où $\Psi = \Psi_a$ et $i = i_a$.

$$W_f = \int_0^{\psi_a} i\,d\psi \tag{I.72}$$

L'énergie W_f emmagasinée dans le champ de couplage (champ magnétique) correspond à la création du flux dans celui-ci.

Donc W_f correspond aussi à l'énergie stockée dans le convertisseur électromécanique. L'aire hachurée de droite correspondant à la courbe $\Psi(i)$ est appelée coénergie, elle est exprimée par:

$$W_c = \int_0^{i_a} \psi\,di \tag{I.73}$$

Ou encore

$$W_c = \psi i - \int_0^{\psi_a} i\,d\psi \tag{I.74}$$

Bien que, la coénergie ait peu ou pas de signification physique, on la trouve commode pour exprimer l'expression de la force et le couple électromagnétique. Il est évident que pour un système magnétique linéaire (pas de saturation), la courbe $\Psi(i)$ est représentée par une droite et on peut écrire :

$$W_f = W_c = \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}Li^2 \tag{I.75}$$

I.2.2 Expression du couple électromagnétique

Si on choisit Ψ et θ comme variables indépendantes, l'énergie emmagasinée W_f sera:

$$W_f = W_f(\psi, \theta) \tag{I.76}$$

Sa dérivée partielle sera :

$$dW_f = \frac{\partial W_f(\psi,\theta)}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial W_f(\psi,\theta)}{\partial \theta} d\theta \tag{I.77}$$

Dans le cas d'un système électromécanique en rotation linéaire, l'expression du couple électromagnétique est donnée par :

$$C_{em} = -\frac{\partial W_f(\psi,\theta)}{\partial x} \tag{I.78}$$

En utilisant l'expression de la coénergie W_c qui est une fonction de i et de θ:

$$W_c = W_c(i,\theta) \tag{I.79}$$

Sa dérivée partielle sera :

$$dW_c = \frac{\partial W_c(i,\theta)}{\partial i} di + \frac{\partial W_c(i,\theta)}{\partial \theta} d\theta \tag{I.80}$$

$$C_{em} = -\frac{\partial W_c(i,\theta)}{\partial \theta} \tag{I.81}$$

Le couple électromagnétique peut donc être exprimé au moyen de la dérivée par rapport au déplacement angulaire soit de l'énergie soit de la coénergie. Les deux méthodes conduisent au même résultat. Le choix le plus commode dépend du problème étudié.

Si on considère que le circuit magnétique n'est pas saturé, on a affaire à un circuit linéaire. Dans ces conditions la courbe de magnétisation $\Psi(i)$ se réduit à une droite. Le flux Ψ est directement proportionnel à i.

$$\psi(i,\theta) = n\phi = L(\theta)i \tag{I.82}$$

$$C_{em}(i,\theta) = \frac{1}{2}\frac{dL(\theta)}{d\theta} i^2 \tag{I.83}$$

$$C_{em}(\phi,\theta) = -\frac{1}{2}\frac{dR(\theta)}{d\theta} \phi^2 \tag{I.84}$$

Ces deux expressions sont identiques compte tenu que $L(\theta) = n^2/R(\theta)$.

Pour un système en rotation à double excitation, de l'équation (I.83) on obtient:

$$C_{em}(i,\theta) = \frac{\partial W_c(i_1,i_2,\phi)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{d\theta} \tag{I.85}$$

Pour un système à n excitations, en partant de la forme matricielle de W_c, on obtient:

$$C_{em}(i,\theta) = \frac{\partial W_c}{\partial \theta} = [I]^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}[L] \right\} [I] \tag{I.86}$$

L'expression (I.86) reste vraie même dans le cas des systèmes non linéaires pour lesquels les inductions sont fonctions de l'angle θ mais aussi des courants i_1, i_2, ...i_n. C'est pourquoi on a conservé la notation matricielle.

I.3. Inductances de la machine électrique

On considère une machine électrique dont l'enroulement statorique comporte 3 phases identiques décalées entre elles, dans l'espace, d'un angle électrique égal à $2\pi/3$. Le rotor comporte un enroulement excité par un courant continu. En général, le rotor est aussi équipé au voisinage de l'entrefer d'un enroulement en court circuit dit "enroulement amortisseur", constitué soit par des barres de cuivre nu court-circuitées par des anneaux comme la cage d'un moteur asynchrone, soit par les pièces en acier massif constituant le cylindre rotorique ou les pôles inducteurs (Fig. I.16). Cet enroulement joue alors un rôle qu'au cours de régimes transitoires, et ne sera pas considéré ici.

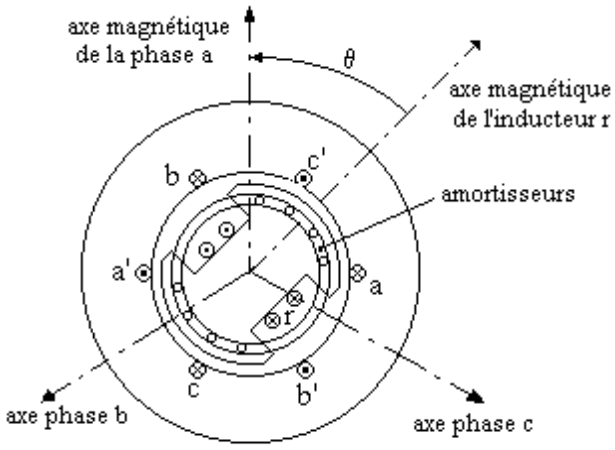


Fig. I.16 Représentation des enroulements d'une machine électrique triphasée avec amortisseur.

La figure I.17 précise la localisation des différents enroulements. Pour le système de référentiel de la transformation de Park, on adopte des axes correspondant à l'axe du système inducteur (axe *d*), respectivement à l'axe interpolaire (axe *q*) (Fig. I.17). L'enroulement rotorique n'aura pas à être transformé en enroulements équivalents puisque l'enroulement réel est par construction déjà localisé selon les axes du référentiel de Park.

L'inductance propre du rotor L_r est constante, elle est indépendante de la position du rotor. Les inductions mutuelles entre les enroulements statorique et rotorique sont fonction de l'angle électrique θ entre l'axe de la phase a pris comme référence et l'axe *d* (fig. 1.18) :

$$\begin{aligned} M_{ar}(\theta) &= M_{ra}(\theta) = M_{sr}\cos\theta \\ M_{br}(\theta) &= M_{rb}(\theta) = M_{sr}\cos(\theta - 2\pi/3) \\ M_{cr}(\theta) &= M_{rc}(\theta) = M_{sr}\cos(\theta + 2\pi/3) \end{aligned} \qquad \text{(I.87)}$$

Avec M_{sr} est l'inductance maximale entre les enroulements statorique et rotorique

Dans une machine à rotor cylindrique, les inductances propres statoriques et rotorique sont constantes :

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_m + L_{\sigma s} \qquad \text{(I.88)}$$

Où L_m et $L_{\sigma s}$ désignent respectivement l'inductance principale et l'inductance de fuite.

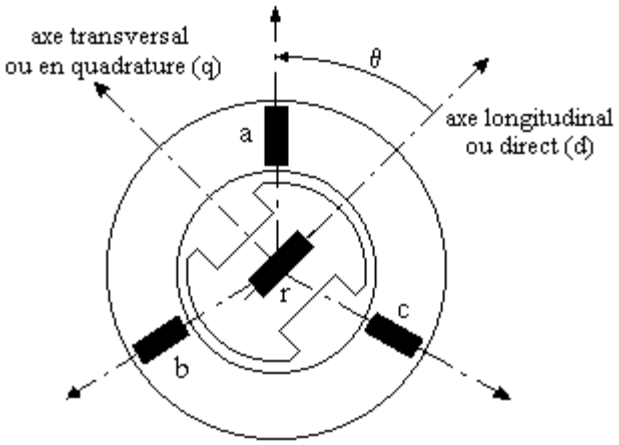


Fig. I.17 Représentation schématique d'une machine électrique dans le repère de Park.

Dans une machine à pôles saillants, par contre la perméance du circuit magnétique est maximale selon l'axe *d* et minimale selon l'axe *q* (Fig. I.18 et I.19).

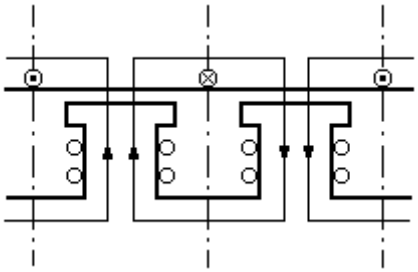


Fig. I.18 Circulation du champ statorique longitudinal (réluctance R_d)

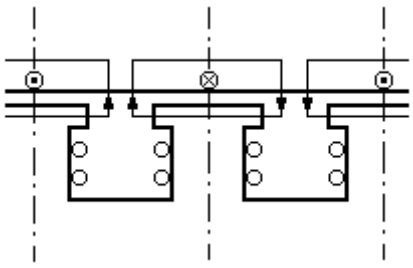


Fig. I.19 Circulation du champ statorique transversal (réluctance R_q)

L'inductance L_m définie dans l'équation (I.88) s'exprime:

$$L_m(\theta) = \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2} + \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2}\cos 2\theta = L_{m0} + L_{sv}\cos 2\theta \qquad \text{(I.89)}$$

Avec :

$$L_{m0} = \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2},\ L_{sv} = \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2} \tag{I.90}$$

Où L_{sd} et L_{sq} représentent respectivement la valeur maximale et la valeur minimale de l'inductance principale du stator et s'appellent inductance longitudinale et inductance transversale.

L'inductance propre d'une phase sera donc:

$$L_{aa}(\theta) = L_{\sigma s} + L_{m0} + L_{sv}\cos 2\theta = L_{s0} + L_{sv}\cos 2\theta \tag{I.91}$$

Les inductances $L_{bb}(\theta)$ et $L_{cc}(\theta)$ se déduisent de la relation (I.91) en remplaçant θ par $(\theta - 2\pi/3)$ et $(\theta + 2\pi/3)$:

$$L_{bb}(\theta) = L_{\sigma s} + L_{m0} + L_{sv}\cos(2\theta + \frac{2\pi}{3}) = L_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \tag{I.92}$$

$$L_{cc}(\theta) = L_{\sigma s} + L_{m0} + L_{sv}\cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}) = L_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \tag{I.93}$$

Dans une machine à rotor cylindrique, les inductances mutuelles entre les phases statoriques sont égales et constantes.

$$M_{ab} = M_{ba} = M_{bc} = M_{cb} = M_{ca} = M_{ac} = cte \tag{I.94}$$

Dans les machines à pôles saillants, les mutuelles statoriques dépendent de θ.

$$\begin{aligned} M_{ab}(\theta) &= -\frac{L_{sd} + L_{sq}}{4} + \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ &= -\frac{1}{2}L_{m0} + L_{sv}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ &= M_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \tag{I.95}$$

$$M_{bc}(\theta) = M_{s0} + L_{sv}\cos 2\theta \tag{I.96}$$

$$M_{ca}(\theta) = M_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \tag{I.97}$$

I.4. Composantes symétriques et relatives

I.4.1 Généralités sur les transformations des systèmes triphasés

La résolution analytique du système d'équations régissant le fonctionnement d'un ensemble de circuits électriques couplés magnétiquement est difficile, même si ces équations sont à

coefficients constants. Elle devient impossible si ces coefficients varient en fonction du temps, ce qui est le cas des machines tournantes. On effectue des changements de variables tels que les relations entre les nouvelles variables soient plus simples que celles existant entre les variables réelles.

Prenons par exemple, un ensemble formé par *n* circuits ; les relations entre les flux et les courants, mise sous forme matricielle, s'écrivent

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \vdots \\ \Psi_N \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} L_a & M_{ab} & & M_{aN} \\ M_{ba} & L_b & & M_{bN} \\ \hline M_{Na} & M_{Nb} & & L_N \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \tag{I.98}$$

Où :

$$[\Psi] = [L][I] \tag{I.99}$$

Considérons une matrice [*T*] transformant le vecteur [Ψ] en un vecteur [Ψ_c] d'éléments $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ et le vecteur [*I*] en vecteur [I_c] d'éléments $I_1, I_2, \ldots I_n$.

$$[\Psi_c] = [T][\Psi] \tag{I.100}$$

$$[I_c] = [T][I] \tag{I.101}$$

Les *n* nouveaux flux $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ sont appelés les composantes des flux réels $\psi_a, \psi_b, ..., \psi_n$.

De même $I_1, I_2, \ldots, I_N$ sont les composantes des courants réels $I_a, I_b, \ldots, I_n$.

Ces composantes seront dites symétriques si la matrice de transformation ou de passage [*T*] est à coefficients constants, réels ou complexes. Elles seront dites relatives si les coefficients de la matrice [*T*] dépendent, d'une façon ou d'une autre, du temps.

En multipliant les deux membres de l'équation (I.87) par [*T*], on aura :

$$[T][\Phi] = [T][L][I] \tag{I.102}$$

$$[\Phi_c] = [T][L][T]^{-1}[I_c] = [L_c][I_c] \tag{I.103}$$

Avec :

$$[L_c] = [T][L][T]^{-1} \tag{I.104}$$

Le changement de variable n'est fructueux que si la matrice [L_c] est nettement plus simple que [*L*] ; l'idéal est qu'elle soit diagonale, les composantes des flux et du courants étant alors liées par :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{I.105}$$

On peut utiliser des transformations différentes pour les divers systèmes de grandeurs considérées (flux, courants, tensions, …) intervenant dans le même problème. Mais d'ordinaire, comme on vient de le faire pour les flux et les courants, on utilise la même.

Considérons deux systèmes, l'un de courants, l'autre de tensions liées par

$$[V] = [Z][I] \tag{I.106}$$

[*V*] et [*Z*] sont les vecteurs formés par les tensions et les courants réels écrits en notation complexe ou en notation opérationnelle.

[*Z*] est la matrice des impédances complexes de la forme $R+jL\omega$ ou des impédances opérationnelles de la forme $R+Lp$.

[*V*] et [*I*] ont leurs composantes [V_c] et [I_c] liées par $[V_c] = [Z_c][I_c]$

Avec : $[V_c] = [T][V]$, $[Z_c] = [T][Z][T]^{-1}$, $[I_c] = [T][I]$

La matrice de passage [*T*] est intéressante, si en plus des facilités quelle apporte à résoudre les équations, elle laisse invariante la puissance complexe ou la puissance instantanée et elle conduit à des réseaux transformés réalisables.

Si avec les composantes on obtient la même puissance qu'avec les grandeurs réelles, on peut déduire directement la puissance (le couple) des composantes, ce qui facilite beaucoup l'établissement de son expression.

La puissance instantanée *P* d'un système *n* phases se déduit des valeurs instantanées des tensions et des courants par :

$$P = V_A I_A + V_B I_B + ... + V_N I_N \tag{I.107}$$

$$P = [V]^t [I] \tag{I.108}$$

Donc :

$$P = \left\{[T]^{-1}[V_c]\right\}^t [T]^{-1}[I_c] \tag{I.109}$$

$$P = [V_c]^t \left\{[T]^{-1}\right\}^t [T]^{-1}[I_c] \tag{I.110}$$

La puissance instantanée est invariante si $[T]^t = [T]^{-1}$ C'est à dire si la matrice [*T*] est *orthogonale*. Dans ce cas, on aura :

$$P = [V_c]^t [I_c] \tag{I.111}$$

I.4.2. Composantes symétriques

- **Composantes de Fortescue**

Les n^2 termes des matrices carrées d'ordre *n* rencontrées en électrotechnique ne sont pas tous distincts.

- Les matrices inductances sont symétriques à cause de la réciprocité des inductances mutuelles. Donc : $M_{ij} = M_{ji.}$
- Les phases d'un système polyphasé de construction symétrique ont souvent toutes la même inductance propre et les mutuelles inductances restent identiques si on permute circulairement les indices, $L_i = L_j$, $M_{ij} = M_{i+1,\,j+1}$

Donc la matrice inductance ne comporte que *(n+2)/2* ou *(n+1)/2* termes distincts suivant que *n* soit pair ou impair et se présente sous la forme :

$$L = \left[\begin{array}{ccc} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{array}\right] \qquad \text{(I.112)}$$

La matrice de passage correspondante, définit la transformation attribuée à Fortescue :

$$F = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 113)}$$

La matrice diagonale des inductances s'écrit :

$$FLF^{-1} = \begin{bmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L+2M \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 114)}$$

Les composantes de Fortescue, d'ailleurs sous la forme ne conserve pas l'invariance de la puissance, sont d'un emploi courant pour l'étude des réseaux triphasés de constitution symétrique en régime déséquilibré. Les composantes sont appelée directe (indice *d*), et inverse (indice *i*) et homopolaire (indice *o*).

Dans le cas de la transformation du vecteur tension, on aura :

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_d \\ V_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 115)}$$

Et inversement :

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_d \\ V_i \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 116)}$$

La matrice de passage modifiée pour conserver l'invariance de la puissance est la matrice unitaire, Donc :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 117)}$$

Et inversement :

$$[F_1]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I. 118)}$$

- **Composantes de Clark**

Utilisant une matrice de passage à coefficients réels *Clark* a introduit les composantes symétriques α, β, o. Cette transformation permet d'écrire par exemple pour la tension :

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \\ V_o \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad \text{(I. 119)}$$

Et inversement :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \\ V_o \end{bmatrix} \quad \text{(I. 120)}$$

Ces composantes sont très commodes pour l'étude des défauts dans les réseaux triphasés, soit par le calcul, soit à l'aide d'analyseurs de réseaux.

La matrice de *Clark* n'est pas orthogonale. Pour obtenir l'invariance de la puissance instantanée, *Concordia* a divisé par leur norme chaque vecteur colonne. La matrice de passage ainsi modifiée pour être orthogonale s'écrit $[C_1]$, comme suit :

$$[C_1] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I.121)}$$

Et inversement :

$$[C_1]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I.122)}$$

I.4.3 Composantes relatives

Les composantes symétriques permettent de simplifier l'étude des réseaux passifs et sont d'une grande utilité pour l'étude analytique ou la simulation des déséquilibres intervenant dans les réseaux. Elles peuvent aussi être appliquées aux machines tournantes synchrones ou asynchrones mais les équations différentielles qu'on obtient par ces changements de variables restent à coefficients fonctions du temps. L'emploi de matrices de transformation à termes non constants permet de ramener le système différentiel à coefficients périodiques caractérisant le fonctionnement d'une machine à un système différentiel à coefficients constants. Les plus commode de ces transformations donnant des composantes relatives ont été proposées toutes deux en 1929, l'une par R.H. Park et l'autre par Y.h.Ku.

- **Composantes de Park**

La transformation de Park, appelée souvent transformation des deux axes, fait correspondre aux variables réelles leurs composantes homopolaire (indice o), d'axe direct (indice d), et d'axe en quadrature (indice *q*) (Fig. I.20).

Dans le cas d'un système de courants, elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \qquad \text{(I.123)}$$

La transformation inverse sera donc :

$$\cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_a & -\sin\theta_a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ I_0 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.124)}$$

Les matrices $[P(\theta)]^{-1}$ et $[P(\theta)]^{t}$ sont différentes ; la matrice de passage d'abord indiquée par Park n'est pas orthogonale. Mais on peut remarquer que le produit scalaire du deux vecteurs colonnes de $[P(\theta)]$ est nul. En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme, on obtient la matrice de transformation modifiée qui est orthogonale et s'écrit :

$$[P_1(\theta_a)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{(I.125)}$$

$$[P_1(\theta_a)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & -\sin\theta_a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{(I.126)}$$

Ainsi écrite, la transformation conserve l'invariance de la puissance instantanéeet conduit à des schémas où les inductances mutuelles sont réciproques.

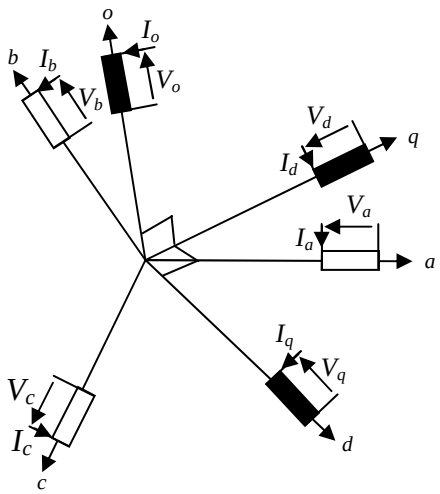


Fig. I.20 Transformation d'un enroulement triphasé (a, b, c) en trois enroulements orthogonaux (d, q, o).

- **Composantes de Ku**

La matrice de la transformation, liant les courants I_a, I_b, I_c à leurs composantes notées I_f, I_b, I_o, a été d'abord présentée par *Y.H. Ku* sous la forme :

$$\begin{bmatrix} I_f \\ I_b \\ I_o \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & ae^{-i\theta} & a^2e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & a^2e^{i\theta} & ae^{i\theta} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \text{(I.127)}$$

Et inversement :

$$\begin{bmatrix} I_f \\ I_b \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & ae^{-i\theta} & 1 \\ a^2e^{i\theta} & ae^{i\theta} & 1 \\ ae^{i\theta} & ae^{-i\theta} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \text{(I.128)}$$

La matrice $[K(\theta)]^{-1}$ est différente de $[K(\theta)]^{t}$ et la matrice de transformation de *Ku* $[K(\theta)]$ sous sa forme initiale n'est pas unitaire. Mais le produit scalaire sur ***C*** de deux vecteurs colonnes de $[K(\theta)]$ est nul ; en divisant chacun de ses vecteurs par sa norme, on obtient la matrice unitaire définissant la forme modifiée de la transformation de *Ku*. Celle-ci s'écrit :

$$[K_1(\theta)] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & ae^{-i\theta} & a^2 e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & a^2 e^{i\theta} & ae^{i\theta} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{I.129}$$

Et inversement :

$$[K_1(\theta)]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{i\theta} & ae^{-i\theta} & 1 \\ a^2 e^{i\theta} & ae^{i\theta} & 1 \\ ae^{i\theta} & ae^{-i\theta} & 1 \end{bmatrix} \tag{I.130}$$

I.5 Exercices

- **Exercice 1 :**

Un convertisseur rotatif à pôles lisses porte, sur son stator, deux bobines disposées perpendiculairement et alimentées par des courants i_{s1} et i_{s2}, sur son rotor, une bobine alimentée par un courant continu de 10 A. On donne les 6 inductances propres et mutuelles :

$L_r = 0{,}2$ H, $M_{rs1} = 0{,}1 \cos\theta$ H, $L_{s1} = 0{,}4$ H, $M_{rs2} = 0{,}1 \sin\theta$ H, $L_{s2} = 0{,}4$ H, $Ms1s2 = 0$

1- Calculer le couple électromagnétique en fonction de i_{s1}, i_{s2} et θ.

2- Quelle position prendra le rotor si on envoie dans les bobines du stator des courants continus $i_{s1} = i_{s2} = 5$A?

- **Exercice 2 :**

Soit le circuit électromagnétique de la Fig. 21 représentée ci-dessous.

1- Etablir le schéma équivalent du système électromagnétique ;

2- Calculer l'inductance de la bobine ;

3- Calculer le courant dans la bobine si l'induction produit vaut B= 1.2T.

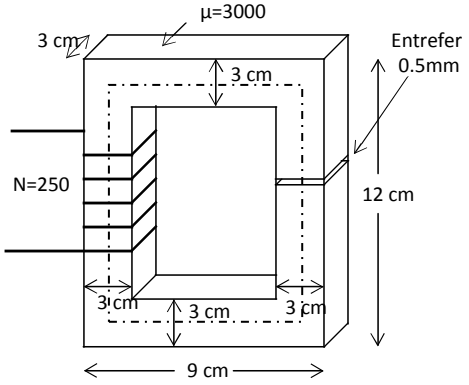
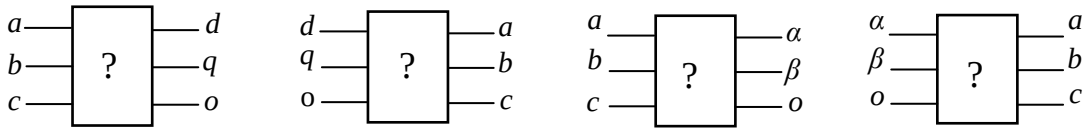


Fig. I.21 : Circuit électromagnétique

- **Exercice 3 :**

1- Citer le nom de la transformation appropriée à chacun des cas suivants :



2- Quelle est la relation entre la transformation de PARK et celle de CONCORDIA ;

3- Etablir la matrice de passage de CONCORDIA modifiée $[C_1]$ si $[P_1]$ donnée ci-dessous est la matrice de PARK modifiée ;

4- Calculer le produit $[C_1]^t . [C_1]^{-1}$.

On rappelle : $[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

- **Exercice 4 :**

On considère une charge triphasée alimentée par un réseau électrique équilibré dont les équations sont comme suit :

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \text{ ; Avec : } \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \sin(\omega t) \\ V_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ V_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})) \end{bmatrix}$$

La transformation de Park, permettant de se ramener des composantes (a, b,c) aux composantes (d,q), est définie par : $\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_o \end{bmatrix} = [p] \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix}$

Où la matrice de Park s'écrit : $[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Définir le model biphasé de Park de la Charge.

CHAPITRE II :
THEORIE DE LA MACHINE ELECTRIQUE GENERALISEE

L'établissement et l'étude des modèles mathématiques des machines électrique ouvrent de grandes perspectives de recherche des convertisseurs électromagnétique. La possibilité de remplacer un dispositif réel par son modèle mathématique comprend beaucoup d'avantages dans le domaine de la recherche des machines électriques.

Mathématiquement. Les machines électriques sont représentées par des modèles entrées-sorties la forme de fonction de transfert ou encore sous forme standard équations en variables d'état. Il existe des méthodes générales qui conduisent à des équations dont le développement nécessite souvent des calculs importants, mais qui rendent compte correctement du comportement des machines tournantes dans majorité des cas.

Ces méthodes s'appliquaient à toutes les machines électriques : à courant continu ou à courant alternatif, qui réalisent un transfert d'énergie par l'intermédiaire de circuits couplés ; elles mettent en relief l'analogie qui existe entre les divers types de machines, et permettent de traiter au moyen d'un même système d'équations, aussi bien les régimes transitoires, que les régimes permanents.

Cependant, l'étude des régimes transitoires des machines électriques tournantes s'accommode d'une moindre rigueur numérique que l'étude des régimes permanents établis. Pour cette raison, on adopte des hypothèses simplificatrices qui, tout en permettant de simplifier notablement les calculs, conduisent à des résultats suffisamment précis pour la plupart des applications [1].

II.1 Machine électrique idéalisée

La machine électrique idéalisée est une machine électrique ayant les hypothèses suivantes :

- L'entrefer est d'épaisseur uniforme et l'effet d'encochage est négligeable ;
- La saturation du circuit magnétique, l'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables ;
- Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température et l'effet de peau n'est pas pris en compte.

De plus, il est admis que la f.é.m. créée par chacune des phases des deux armatures est à réparation sinusoïdale.

Parmi les conséquences importantes des ces hypothèse. On peut citer:

-L'additivité des flux ;

-La constance des inductances propres ;

-La loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements du stator et du rotor en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

II.2 Machine électrique généralisée dans le repère naturel

En général, on utilise l'un des deux modèles de la machine électrique généralisée :

1. Modèle triphasé :
2. Modèle biphasé.

II.2.1 Modèle triphasé de la machine généralisée.

La machine électrique triphasée est constituée d'un stator et d'un rotor mobile. Le stator possède trois enroulements couplés en étoile ou en triangle qui sont alimentés par un système triphasé de tensions, il en résulte la création d'un champ magnétique dans l'entrefer de la machine. La machine électrique généralisée triphasée est une machine bipolaire triphasée idéale. La figure (II.1) rappelle la position des axes des phases statoriques et rotoriques dans l'espacé électrique.

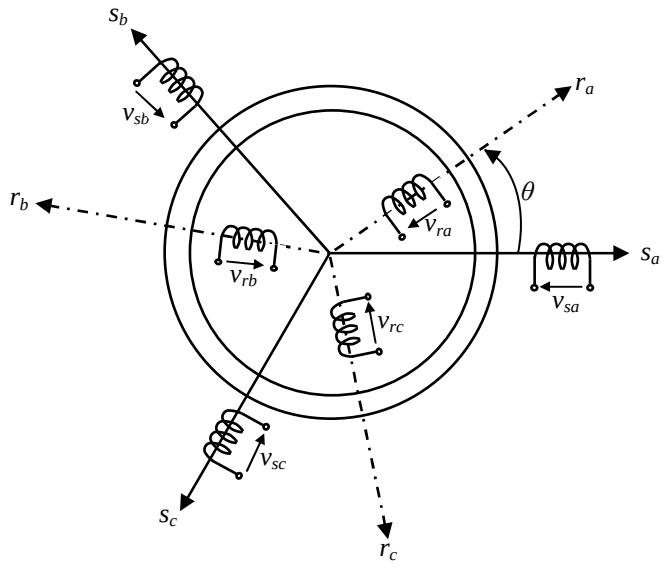


Fig. II.1 Représentation d'une machine électrique généralisée triphasée

D'après les hypothèses simplificatrices, tous les coefficients d'inductance propre sont constants et les coefficients d'inductance mutuelle ne dépendent que de la position des enroulements.

- **Equations des tensions**

Pour ce modèle, on peut écrire les équations des tensions représentant pour chaque enroulement la somme de la chute ohmique et la chute inductive liée au flux.

- Pour le stator :

$$\begin{cases} v_{sa} = R_s i_{sa} + \dfrac{d\psi_{sa}}{dt} \\ v_{rb} = R_r i_{rb} + \dfrac{d\psi_{sb}}{dt} \\ v_{sc} = R_r i_{rc} + \dfrac{d\psi_{sc}}{dt} \end{cases} \quad \text{(II.1)}$$

- Pour le rotor :

$$\begin{cases} v_{ra} = R_r i_{ra} + \dfrac{d\psi_{ra}}{dt} \\ v_{rb} = R_r i_{rb} + \dfrac{d\psi_{rb}}{dt} \\ v_{rc} = R_r i_{rc} + \dfrac{d\psi_{rc}}{dt} \end{cases} \quad \text{(II.2)}$$

Où

v_{sa}, v_{sb}, v_{sc} et v_{ra},v_{rb},v_{rc} : Les tensions simples triphasées, respectivement, au stator et au rotor de la machine ;

i_{sa}, i_{sb}, i_{sc} et i_{ra},i_{rb},i_{rc} : Les courants au stator et au rotor de la machine ;

ψ_{sa}, ψ_{sb}, ψ_{sc} et ψ_{ra},ψ_{rb},ψ_{rc} : Les flux circulants, respectivement, au stator et au rotor de la machine ;

R_S et R_r : Les résistances des enroulements statorique et rotorique.

- **Equations des flux**

Les expressions des flux sous forme matricielle sont :

$$\begin{bmatrix} [\psi_{sabc}] \\ [\psi_{rabc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{sabc}] \\ [i_{rabc}] \end{bmatrix} \quad \text{(II.3)}$$

Où

$$[L_s]=\begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix}=l_s\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} ; \quad [L_r]=\begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix}=l_r\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

l_s , l_r - les inductances propres statorique et rotoriques ;

m_s , m_r - les inductances mutuelles statorique et rotorique.

L'inductance mutuelle entre le stator et le rotor est définie par :

$$[M_{sr}]=[M_{rs}]^T=M_0\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Où M_0 représente le maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor ; obtenu lorsque les axes sont alignés ;

II.2.2 Modèle biphasé de la machine électrique généralisée

Ce modèle est le plus utilisé dans le cas d'une machine symétrique. La machine électrique généralisée biphasée est une machine bipolaire, biphasée idéale avec deux enroulements au stator et deux enroulements au rotor (*Fig. II.2*).

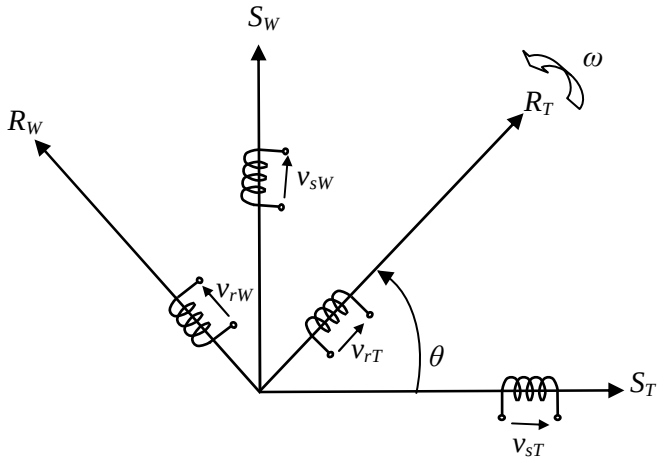


Fig. II.2 représentation d'une machine électrique biphasée généralisée

En plus des équations de tensions on peut écrire l'équation caractérisant la position angulaire entre le stator et le rotor :

$$\theta = \int \omega dt \tag{II.4}$$

Du modèle de la machine généralisée biphasée. On peut obtenir n'importe quel modèle de la machine électrique.

- **Equations des tensions**

En considérant le modèle biphasé de la machine généralisée (fig. II.2), on peut écrire les équations de Kirchhoff pour chaque élément :

$$\begin{cases} v_{ST} = R_s i_{ST} + \dfrac{d\psi_{ST}}{dt} \\ v_{SW} = R_s i_{SW} + \dfrac{d\psi_{SW}}{dt} \\ v_{RT} = R_R i_{RT} + \dfrac{d\psi_{RT}}{dt} \\ v_{RW} = R_R i_{RW} + \dfrac{d\psi_{RW}}{dt} \end{cases} \tag{II.5}$$

- **Equations des flux**

Dans le système d'équations (II.5), les flux sont de la forme :

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_{ST} i_{ST} + M_{ST-RT} i_{RT} + M_{RT-RW} i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_{SW} i_{SW} + M_{SW-RT} i_{RT} + M_{SW-RW} i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_{RT} i_{RT} + M_{RT-ST} i_{ST} + M_{RT-SW} i_{SW}; \\ \psi_{RW} = L_{RW} i_{RW} + M_{RW-ST} i_{ST} + M_{RW-SW} i_{SW} \end{cases} \tag{II.6}$$

Ou r_S, r_r : les résistances des enroulements du stator et du rotor ;

$L_{ST}, L_{SW}, L_{RT}, L_{RW}$: Les inductances propres du stator et du rotor ;

$M_{ST-RT}, M_{SW-RW}, M_{ST-RW}, M_{RT-SW}$: Les inductances mutuelles entre les phases statoriques et rotoriques.

Pour la machine idéale, on considère :

$$\begin{aligned} L_{ST} &= L_{SW} = L_s \\ L_{RT} &= L_{RW} = L_r \end{aligned} \tag{II.7}$$

Si M_0 est l'inductance mutuelle entre les enroulements du stator et du rotor pour $\theta = 0$, alors on peut écrire :

$$\begin{cases} M_{ST-RT} = M_{SW-RW} = M_0 \cos\theta \\ M_{ST-RW} = M_{RW-ST} = -M_0 \sin\theta \\ M_{RT-SW} = M_{SW-RT} = M_0 \sin\theta \end{cases} \quad \text{(II.8)}$$

Pour les flux, on peut écrire :

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_S i_{ST} + M\cos\theta\, i_{RT} - M\sin\theta\, i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_S i_{SW} + M\sin\theta\, i_{RT} + M\cos\theta\, i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_r i_{RT} + M\cos\theta\, i_{ST} + M\sin\theta\, i_{SW} \\ \psi_{RW} = L_r i_{RW} + M\cos\theta\, i_{SW} - M\sin\theta\, i_{ST} \end{cases} \quad \text{(II.9)}$$

Les systèmes d'axes du stator ($S_T S_W$) et du rotor ($R_T R_W$) tournent l'un par rapport à l'autre avec la vitesse angulaire ω ; l'angle θ dépend de cette vitesse et varie en fonction du temps.

Les systèmes d'équation (II.5) et (II.8) obtenus sont compliqués et dépendent des coefficients variables. Pour simplifier la résolution du système d'équations de départ, on lui fait subir des transformations en remplaçant les grandeurs variables naturelles (courants, flux embrassés et tensions) par d'autres grandeurs variables plus commodes à utiliser ; c'est à dire qu'il faut obtenir un système d'équations différentielles avec des coefficients constants. A cet effet, on passe des axes naturels du stator (($S_T S_W$) et du rotor ($R_T R_W$)) aux axes réunis (confondus) pour le stator et le rotor (*U,V*) qui tournent avec une vitesse quelconque ω_a. Le modèle de cette machine généralisée est représenté sur la Fig. II.3.

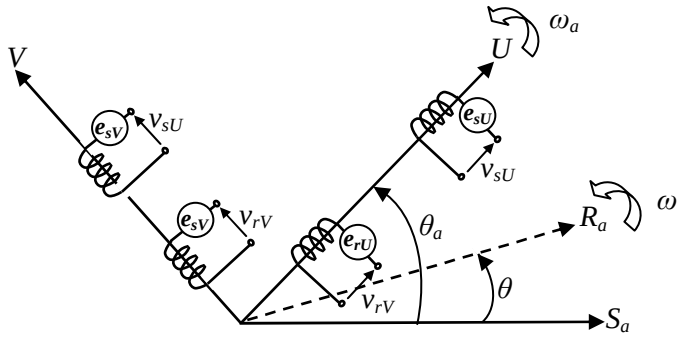


Fig.II.3 : Modèle généralisée biphasé selon les axes UV

Le système d'axes de coordonnées tourne avec la vitesse ω_a par rapport au stator et avec la vitesse (ω_a-ω) par rapport au rotor. Cependant, il faudrait considérer dans chaque enroulement du stator et du rotor la force électromotrice supplémentaire (*e*).

Du moment que le rotor est immobile par rapport au stator, l'inductance mutuelle entre les enroulements du stator et du rotor devient une valeur constante et les coefficients des dérivées des courants sont également constants.

Dans tout ce qui suit, les machines électriques sont considérées symétriques, et par conséquent, il ne sera fait appel qu'au modèle biphasé.

II.3 Passage d'un système triphasé au système biphasé et inversement

II.3.1 Application de la transformation de Park au système réel *abc*

Cette transformation consiste à transformer les enroulements triphasés (statoriques et rotoriques) en deux enroulements biphasés orthogonaux *UV*. La conversion implique la transformation aux enroulements équivalents, du point de vue électrique et magnétique. La figure II.3 représente la transformation des enroulements réels *abc* en enroulements orthogonaux *UV*.

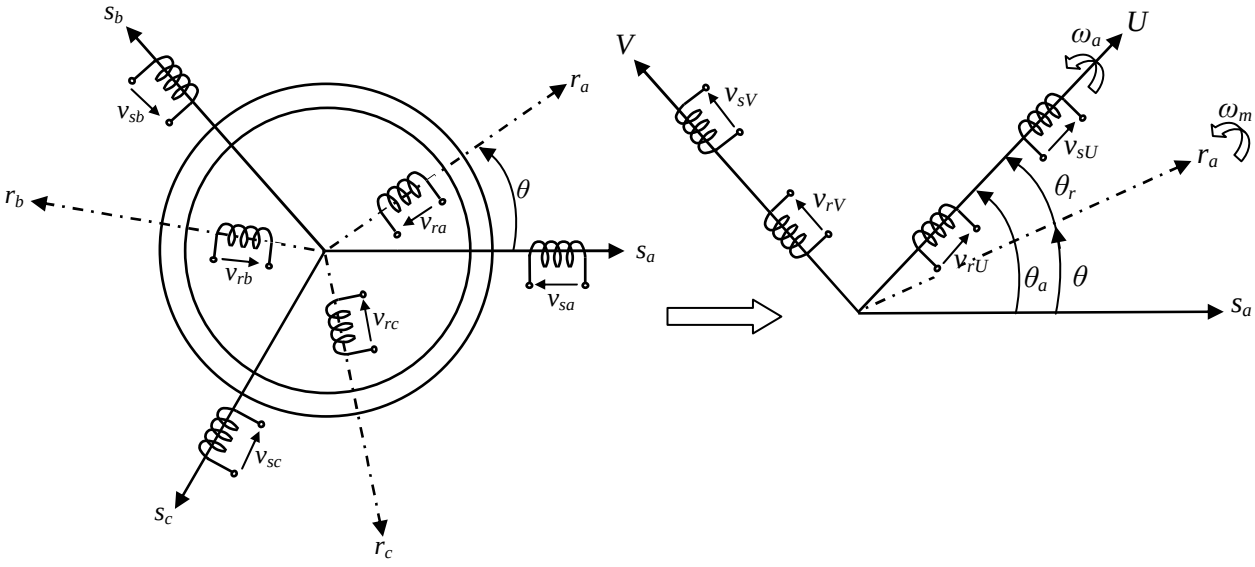


Fig. II.4 : Passage du système triphasé abc au système biphasé UV

Les notations portées sur la Fig. II.4 désignent respectivement :

- θ : Angle électrique entre a_s et a_r ;
- θ_a : Angle électrique entre s_a et U ;
- θ_r : Angle électrique entre r_a et V ;
- ω_a : Vitesse angulaire électrique du système d'axes UV ($\omega_a = \frac{d\theta_a}{dt}$) ;
- ω_m : Vitesse angulaire électrique du rotor ($\omega_m = \frac{d\theta}{dt}$).

Cette transformation est définie par sa matrice de passage [$P(\theta_a)$] tel que :

$$[P(\theta)]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\cos\theta_a & \cos(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a+\frac{2\pi}{3})\\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a+\frac{2\pi}{3})\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \text{(II.10)}$$

La matrice de passage [$P(\theta_a)$] écrite sous cette forme est orthogonale, ce qui conduit à la conservation de la puissance instantanée. L'orthogonalité nous permet d'écrire:

$$[P(\theta_a)]^{-1}=[P(\theta_a)]^T=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\cos\theta_a & -\sin\theta_a & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos(\theta_a+\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a+\frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \text{(II.11)}$$

L'angle θ_a prend la valeur θ_S pour les grandeurs statoriques et la valeur ($\theta_r = \theta_S - \theta$) pour les grandeurs rotoriques.

On a ainsi :

$$[X_{UV}]=[P(\theta_a)][X_{abc}] \quad \text{(II.12)}$$

X : pouvant représenter la tension, le courant ou le flux.

Lorsque les sommes des composantes réelles (*abc*) sont nulles, l'équation traduisant la composante homopolaire, toujours vérifiée car identiquement nulle, devient inutile.

La transformation inverse s'écrit :

$$[X_{abc}]=[P(\theta_a)]^{-1}[X_{UV}] \quad \text{(II.13)}$$

- **Equations des tensions**

En utilisant la matrice de passage [$p(\theta_a)$], on obtient dans le plan biphasé *UV* les nouvelles équations des tensions suivantes :

$$\begin{cases} v_{sU}=R_s i_{sU}+\dfrac{d\psi_{sU}}{dt}-\omega_a\psi_{sV} \\ v_{sV}=R_s i_{sV}+\dfrac{d\psi_{sV}}{dt}+\omega_a\psi_{sU} \\ v_{rU}=R_r i_{rU}+\dfrac{d\psi_{rU}}{dt}-(\omega_a-\omega_m)\psi_{rV} \\ v_{rV}=R_r i_{rV}+\dfrac{d\psi_{rV}}{dt}+(\omega_a-\omega_m)\psi_{rU} \end{cases} \quad \text{(II.14)}$$

- **Equations des flux**

$$\begin{cases} \psi_{sU} = L_s i_{sU} + M i_{rU} \\ \psi_{sV} = L_s i_{sV} + M i_{rV} \\ \psi_{rU} = L_r i_{rU} + M i_{sU} \\ \psi_{rV} = L_r i_{rV} + M i_{sV} \end{cases} \quad \text{(II.15)}$$

Avec :

- $L_s = l_s - m_s$: Inductance cyclique propre du stator ;
- $L_r = l_r - m_r$: Inductance cyclique propre du rotor ;
- $M = \frac{3}{2} M_0$: Inductance cyclique mutuelle stator - rotor.

II.3.2 Choix du référentiel

Pour étudier la théorie des processus transitoires des machines électrique, on utilise trois systèmes d'axes de coordonnées qui sont des cas particuliers du système d'axes « *U.V* ».

- **Référentiel lié au stator**

Ce système d'axes est immobile par rapport au stator $(\omega_a = 0)$. Dans ce référentiel, le système (II.13) devient et les indices *U* et *V* sont remplacés par α et β :

$$\begin{cases} v_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \dfrac{d\psi_{s\alpha}}{dt} \\ v_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \dfrac{d\psi_{s\beta}}{dt} \\ v_{r\alpha} = R_r i_{r\alpha} + \dfrac{d\psi_{r\alpha}}{dt} + \omega_m \psi_{r\beta} \\ v_{r\beta} = R_r i_{r\beta} + \dfrac{d\psi_{r\beta}}{dt} - \omega_m \psi_{r\alpha} \end{cases} \quad \text{(II.16)}$$

C'est un avantage pour ce système d'axes puisqu'il ne nécessite pas une transformation vers le système réel. Ce système peut être utilisé pour étudier les régimes de démarrage et de freinage des machines à courant alternatif avec le branchement de résistances supplémentaires au niveau du circuit du stator.

L'utilisation de ce système est possible pour les machines à courant alternatif et les transformateurs.

- **Référentiel lié au rotor**

Ce système d'axes est immobile par rapport au rotor tournant à une vitesse ω_m**.** De manière analogue, dans la formule (II.14) en prenant $\omega_a = \omega_m$ et remplaçant les indices *U, V* par *d, q* :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_m \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_m \psi_{ds} \\ v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} \end{cases} \quad \text{(II.17)}$$

Le système d'axes *d,q* est utilisé pour étudier les processus transitoires dans les machines synchrones et asynchrones avec une connexion non symétrique des circuits du rotor.

- **Référentiel lié au champ tournant**

Enfin, un troisième repère aussi intéressant est celui où *U* et *V* sont fixes par rapport au champ tournant. Dans ce cas, $\omega_a = \omega_s$. Ce repère devient intéressant lors d'une étude de la commande de la machine asynchrone ; car les grandeurs transformées selon les axes *d* et *q* deviennent des constantes, c'est à dire des grandeurs continues, faciles à réguler.

Dans ce référentiel, le système (II.14) devient :

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_s \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_s \psi_{ds} \\ v_{dr} = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_m)\psi_{qr} \\ v_{qr} = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_m)\psi_{dr} \end{cases} \quad \text{(II.18)}$$

II.4 Machine électrique généralisée sous forme complexe

Pour étudier les phénomènes transitoires dans les machines électriques, on utilise souvent des grandeurs complexes. Faisons coïncider l'axe réel avec l'axe *U* et l'axe imaginaire avec l'axe *V* ; alors :

$$\begin{cases} \overline{\psi}_S = \psi_{SU} + j\psi_{SV} \\ \overline{i}_S = i_{SU} + ji_{SV} \\ \overline{v}_S = v_{SU} + jv_{SV} \\ \overline{\psi}_r = \psi_{ru} + j\psi_{rv} \\ \overline{i}_r = i_{ru} + ji_{rv} \\ \overline{v}_r = v_{ru} + jv_{rv} \end{cases} \quad \text{(II.19)}$$

Les tensions peuvent être représentées sous forme complexe :

$$\begin{cases} \overline{v}_s = V_m e^{j\theta_s} e^{j(\omega_s - \omega_a)t} \\ \overline{v}_r = V_m e^{j\theta_r} e^{j(\omega_r + \omega_m - \omega_a)t} \end{cases} \quad \text{(II.20)}$$

Le système d'équations différentielles sous forme complexe devient :

$$\begin{cases} \overline{v}_s = R_s \overline{i}_s + \dfrac{d\overline{\psi}_s}{dt} + j\overline{\psi}_s \omega_a \\ \overline{v}_r = R_r \overline{i}_r + \dfrac{d\overline{\psi}_r}{dt} + j\overline{\psi}_r (\omega_a - \omega_m) \end{cases} \quad \text{(II.21)}$$

Si on utilise un autre système d'axes de coordonnées, il faut remplacer, dans le système (II.21), la vitesse correspondante à ce nouveau système d'axes, par exemple :

Pour les axes α, β, où $\omega_a = 0$:

$$\begin{cases} \overline{v}_s = R_s \overline{i}_s + \dfrac{d\overline{\psi}_s}{dt} \\ \overline{v}_r = R_r \overline{i}_r + \dfrac{d\psi_r}{dt} - j\overline{\psi}_r \omega_m \end{cases} \quad \text{(II.22)}$$

Pour les axes d, q, où $\omega_a = \omega_m$:

$$\begin{cases} \overline{v}_s = r_s \overline{i}_s + \dfrac{d\overline{\psi}_s}{dt} + j\overline{\psi}_s \omega_m \\ \overline{v}_r = r_r \overline{i}_r + \dfrac{d\overline{\psi}_r}{dt} \end{cases} \quad \text{(II.23)}$$

Et pour les axes d, q liée au champ tournant, où $\omega_a = \omega_s$:

$$\begin{cases} \overline{v}_s = r_s \overline{i}_s + \dfrac{d\overline{\psi}_s}{dt} + j\overline{\psi}_s \omega_s \\ \overline{v}_r = r_r \overline{i}_r + \dfrac{d\overline{\psi}_r}{dt} + j\overline{\psi}_r (\omega_s - \omega_m) \end{cases} \quad \text{(II.24)}$$

II.5 Equation du mouvement de la machine électrique

Pour étudier les phénomènes transitoires électromécaniques avec une vitesse rotorique variable (par exemple le démarrage, le freinage, la variation de la charge à l'arabe, etc…), il faut ajouter l'équation du mouvement au système d'équations différentielles (I.21) :

$$C_{em} - C_r - K_f \Omega_m = J \frac{d\Omega_m}{dt} \tag{II.25}$$

Où :

C_{em} : Le couple électromagnétique de la machine ;

C_r : Le couple résistant (statique) à l'arbre de la machine ;

J : Le moment d'inertie ;

K_f : le coefficient de frottement ;

Ω_m : La vitesse angulaire du rotor, ou vitesse mécanique du rotor.

La vitesse électrique du rotor :

$$\omega_m = p.\Omega_m \tag{II.26}$$

Où p : le nombre de paires de pôles.

En tenant compte de l'expression de la vitesse électrique, l'expression (II.38) devient :

$$C_{em} - C_r - K_f \Omega = \frac{J}{P} \frac{d\omega_r}{dt} \tag{II.27}$$

Dans la théorie du champ électromagnétique des machines électriques, le couple électromagnétique intervenant dans l'équation (II.27) s'exprime par la dérivée partielle de stockage d'énergie électromagnétique par rapport à l'angulaire géométrique de rotation du rotor :

$$C_e = \frac{dW}{d\theta_{géom}} = p \frac{dW}{d\theta_{élect.}} \tag{II.28}$$

Pour la machine électrique biphasée, l'expression de l'énergie électromagnétique est de la forme :

$$w = \frac{1}{2}(\psi_{su}.i_{su} + \psi_{sv}.i_{sv} + \psi_{ru}.i_{ru} + \psi_{rv}.i_{rv}) \tag{II.29}$$

Considérons la puissance absorbée par la machine dans un système d'axes *U,V,* tout en négligeant les composants homopolaires :

$$P_a = v_{su} i_{su} + v_{sv} i_{sv} \tag{II.30}$$

Où

$$\begin{aligned} v_{su} &= R_s i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \psi_{sv}\omega_a \\ v_{sv} &= R_s i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \psi_{su}\omega_a \end{aligned} \tag{II.31}$$

En remplaçant v_{su} et v_{sv} par leurs expressions dans (II.30), on obtient :

$$\begin{aligned} P_a &= r_s i_{su}^2 + \frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} - \psi_{sv} i_{su} \omega_a + r_s i_{sv}^2 + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv} + \psi_{su} i_{sv} \omega_a \\ &= \left(\frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv} \right) + (\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \omega_a + \left(r_s i_{su}^2 + r_s i_{sv}^2 \right) \end{aligned} \quad \text{(II.32)}$$

L'expression (II.32) est composée de trois termes :

- Le terme $\left(\frac{d\psi_{su}}{dt} i_{su} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} i_{sv} \right)$ représente la réserve d'énergie électromagnétique ou variation d'énergie ;
- Le terme $(\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \omega_a$ représente la puissance électromagnétique ;
- Le terme $\left(r_s i_{su}^2 + r_s i_{sv}^2 \right)$ représente les pertes par effet joule.

Sachant que :

$$P_{em} = C_{em} \omega_a \quad \text{(II.33)}$$

On obtient

$$C_{em} = (\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \quad \text{(II.34)}$$

Où

$$\begin{cases} \psi_{su} = L_s i_{su} + M i_{ru} \\ \psi_{sv} = L_s i_{sv} + M i_{rv} \end{cases} \quad \text{(II.35)}$$

En remplaçant ψ_{su} et ψ_{sv} par leurs expressions, on aura :

$$C_{em} = M (i_{ru} i_{sv} - i_{rv} i_{su}) \quad \text{(II.36)}$$

En tenant compte de (II.35), le couple devient,

$$C_{em} = p(\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}) \quad \text{(II.37)}$$

Ou

$$C_{em} = pM (i_{ru} i_{sv} - i_{rv} i_{su}) \quad \text{(II.38)}$$

De manière analogue, on peut déterminer le couple en fonction des paramètres rotoriques. Pour ce faire, déterminons les courants en fonction des flux en multiplions la première équation du système (II.19) par L_r et la seconde par M et par soustraction, on obtient :

$$\psi_{su} L_r - \psi_{ruM} = (L_s L_r - M^2) i_{su} \quad \text{(II.39)}$$

On obtient l'expression du couple en fonction des flux :

$$C_{em} = \frac{pM}{L_s L_r - M^2} (\psi_{ru} \psi_{sv} - \psi_{rv} \psi_{su}) \quad \text{(II.40)}$$

Pour la machine polyphasée (*m* phases) ramenée à la machine biphasée, il faut multiplier toute expression du couple électromagnétique par le coefficient *m/2*, par exemple :

$$C_{em} = \frac{mp}{2} (\psi_{su} i_{sv} - \psi_{sv} i_{su}); \quad \text{(II.41)}$$

II.6 Exercices

- **Exercice 1 :**

Considérons le stator d'une machine triphasée généralisée caractérisé par les systèmes de tensions et courants :

$$[i_{abc}]=\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} ; [v_{abc}]=\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} ; [i_{dqo}]=\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{bmatrix} ; [v_{dqo}]=\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{bmatrix}$$

1- Donner l'expression de la puissance instantanée *p(t)* de l'armature triphasée en fonction de i_a, i_b, i_c et de v_a, v_b, v_c. Ecrire l'expression de *p(t)* sous forme matricielle en fonction des matrices$[i_{abc}]$ et $[v_{abc}]$.

2- Montrer, en utilisant la transformation de Concordia, que la puissance instantanée peut s'écrire en fonction des courants et des tensions de l'armature diphasée comme suit :

$$p(t)= [v_{dqo}]^t [i_{dqo}]$$

- **Exercice 2 :**

Une machine généralisée dont les enroulements sont couplés en étoile peut être représentée par deux armatures diphasées fictives. Ces armatures sont placées dans un repère *dq* unique comme il est montré sur la Fig. II. :

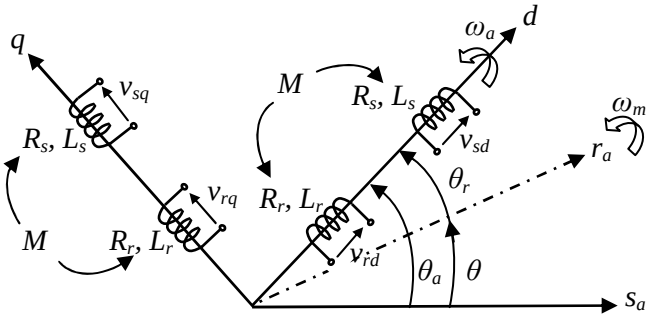


Fig. II.5 : Machine diphasée fictive

La modélisation en régime dynamique de cette machine permet d'établir :

Pour le stator : $\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_s \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_s \psi_{ds} \end{cases}$ et $\begin{cases} \psi_{sd} = L_s i_{sd} + M i_{rd} \\ \psi_{sv} = L_s i_{sq} + M i_{rq} \end{cases}$

Pour le rotor : $\begin{cases} v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_m)\psi_{rq} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_m)\psi_{rd} \end{cases}$ et $\begin{cases} \psi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd} \\ \psi_{sv} = L_r i_{rq} + M i_{sq} \end{cases}$

1- Etablir les expressions des différents puissances mises en jeu au niveau de la machine asynchrone ;

On pourra s'inspirer de l'expression de la puissance instantanée au niveau de la machine :

$$p(t)= v_{sd}i_{sd} + v_{rd}i_{rd} + v_{sq}i_{sq} + v_{rq}i_{rq} = p_{joules} + p_{mag} + p_{méc}$$

2- Montrer que : $(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) = -(\psi_{rd} i_{rq} - \psi_{rq} i_{rd})$

3- Etablir l'expression de P_{mec} en fonction de ψ_{sd}, ψ_{sq}, i_{sd}, i_{sq} et ω_m puis en fonction ψ_{rd}, ψ_{rq}, i_{rd}, i_{rq} et $\omega_{m.}$

4- Montrer que le couple électromagnétique peut s'écrire :

$$C_{em} = p\frac{M}{L_r}(\psi_{rd} i_{sq} - \psi_{rq} i_{sd})$$

5- Si on fixe le repère ***dq*** par rapport au stator, que devienne sa vitesse de rotation ;

6- Représenter cette machine dans le repère de Concordia ($\alpha\beta$***)***;

7- Etablir le modèle de Concordia (en $\alpha\beta$***)*** correspondant ;

8- Si on considère les vecteurs suivants :

$[X]=[\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta}, i_{r\alpha}, i_{r\beta}]$ et $[U]=[v_{s\alpha}, v_{s\beta}]$.

Mettre le modèle ainsi obtenu sous la forme . $[\dot{X}] = [A][X] + [B][U]$

Avec $[A]$ et $[B]$ sont deux matrices à déterminées.

CHAPITRE III :
MODELISATION DES MACHINES A COURANT CONTINU

Les dynamos à courant continu ont été les premiers convertisseurs électromécaniques utilisés. Leur usage est en régression très nette en particulier en tant que générateurs de courant. On utilise de préférence des redresseurs à semi-conducteurs alimentés par des alternateurs. Les moteurs à courant continu restent très utilisés dans le domaine de l'automobile (ventilateurs, lève-vitre, etc.) ainsi qu'en tant que « moteur universel » dans l'électroménager et l'outillage. En outre, il est possible d'obtenir de manière relativement simple sa modélisation.

III.1. Modèle de la machine à courant continu sur les axes *d,q*

La MCC, supposée bipolaire (Fig. III.1), comporte :

- Au stator, suivant l'axe *d*, deux enroulements inducteurs série et shunt représentés par les indices respectivement *s* et *f* ;
- Au rotor, suivant l'axe *q*, un enroulement d'induit, un enroulement auxiliaire et un enroulement de compensation représentés par les indices respectivement *a*, *aux* et *c*.

Les pôles auxiliaires et de commutation produisent une f.é.m. de signe opposé de sorte qu'elle annule l'effet de la réaction magnétique d'induit et la f.é.m. qui cause les étincelles. Ces enroulements sont placés en série avec l'enroulement de l'induit par rapport à l'axe *q*.

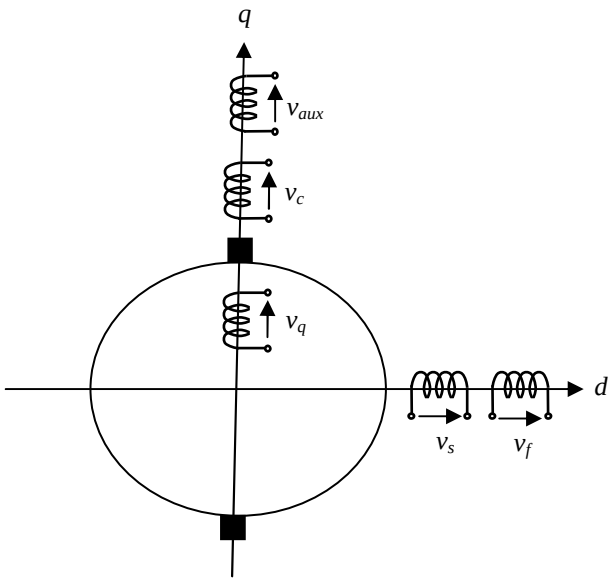


Fig. III.1 : Représentation de la MCC sur les axes d et q.

III.1.1. Equation des tensions

D'après le modèle de la Fig. III.1, les relations de tensions, pour le fonctionnement en moteur, sont de la forme ci-dessous :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + \dfrac{d\psi_f}{dt} \\ v_s = R_s i_s + \dfrac{d\psi_s}{dt} \\ v_c = R_c i_c + \dfrac{d\psi_c}{dt} \\ v_{aux} = R_{aux} i_{aux} + \dfrac{d\psi_{aux}}{dt} \\ v_a = R_a i_a + \dfrac{d\psi_a}{dt} + \omega_m \psi_d \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

III.1.2. Equation des flux

Les relations de flux s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi_f = L_f i_f + M_{fs} i_s \\ \psi_s = L_s i_s + M_{sf} i_f \\ \psi_c = L_c i_c + M_{cq} i_q + M_{caux} i_{aux} \\ \psi_{aux} = L_{aux} i_{aux} + M_{aux.a} i_a + M_{aux.c} i_c \\ \psi_d = M_{fa} i_f + M_{sa} i_s \\ \psi_q = L i_a + M_{a.c} i_c + M_{a.aux} i_{aux} \end{cases} \quad \text{(III.2)}$$

Les équations III.1 et III.2 peuvent être réduite en considérant la tension et le flux total aux bornes du circuit d'induit et l'emplacement série de ces enroulements. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} v_a = v_q + v_{aux} + v_c \\ i_a = i_s = i_{aux} \\ \psi_a = \psi_q + \psi_{aux} + \psi_c \end{cases} \quad \text{(III.3)}$$

Alors :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + \dfrac{d\psi_f}{dt} \\ v_s = R_s i_s + \dfrac{d\psi_s}{dt} \\ v_a = R_a i_a + \dfrac{d\psi_a}{dt} + \omega_m \psi_d \end{cases} \quad \text{(III.4)}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} + M_{fs} \dfrac{di_a}{dt} \\ v_s = R_s i_s + L_s \dfrac{di_a}{dt} + M_{fs} \dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = R_a i_a + L_a \dfrac{di_a}{dt} + \omega_m (M_{fa} i_f + M_{sa} i_s) \end{cases} \quad \text{(III.5)}$$

Avec :

$$\begin{cases} R_a = R + R_{aux} + R_c \\ L_a = R + R_{aux} + R_c \\ \psi_a = L + L_{aux} + L_c + 2(M_{ac} + M_{a.aux} + M_{c.aux}) \end{cases} \quad \text{(III.6)}$$

III.1.3 Expression du couple électromagnétique

La puissance électrique instantanée de la MCC est donnée par la relation suivante :

$$p(t) = v_a i_a + v_f i_f + v_s i_s + v_c i_c + v_{aux} i_{aux} \quad \text{(III.7)}$$

Ou encore :

$$p(t) = v_a i_a + v_f i_f + v_s i_s \quad \text{(III.8)}$$

L'énergie absorbée par la MCC pendant un intervalle de temps *dt* :

$$dW = p(t).dt \quad \text{(III.9)}$$

$$dW = p(t).dt \quad \text{(III.10)}$$

$$dW = (R_a i_a^2 + R_s i_s^2 + R_f i_f^2)dt + (d\psi_a i_a + d\psi_f i_f + d\psi_c i_c) + \omega_m \psi_d i_a .dt \quad \text{(III.11)}$$

dW peut être décomposée en :

$$dW = dW_j + dW_{mag} + dW_{méc} \quad \text{(III.12)}$$

Avec :

$dW_j = (R_a i_a^2 + R_s i_s^2 + R_f i_f^2)dt$: L'énergie dissipée par effet joule ;

$dW_{mag} = (d\psi_a i_a + d\psi_f i_f + d\psi_c i_c)$: La variation de l'énergie magnétique emmagasinée dans le champ de couplage ;

$dW_{méc} = \omega_m \psi_d i_a .dt$: L'énergie transformée en énergie mécanique.

Le couple électromécanique est donnée par :

$$C_{em} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad \text{(III.13)}$$

$$C_{em} = \psi_d i_a \quad \text{(III.14)}$$

En utilisant l'équation (III.2), on aura :

$$C_{em} = (M_{fa} i_f + M_{sa} i_s) i_a \qquad \text{(III.15)}$$

III.1.4 Equation du mouvement

La Loi fondamentale de la dynamique appliquée à la MCC permet d'écrire :

$$C_{em} - C_r - K_f \Omega = \frac{J}{P} \frac{d\omega_r}{dt} \qquad \text{(II.16)}$$

Où :

C_{em} : Le couple électromagnétique de la machine ;

C_r : Le couple résistant (statique) à l'arbre de la machine ;

J : Le moment d'inertie ;

K_f : le coefficient de frottement ;

Ω_m : La vitesse électrique du rotor

p : le nombre de paires de pôles.

III.2. Application de la théorie généralisée aux divers modes d'excitation

III.2.1. Fonctionnement en Moteur

- **Moteur à excitation séparée**

L'excitation est séparée ou indépendante si le courant dans l'inducteur est fourni par une source autre que celle alimentant l'induit. Dans ce cas la machine ne possède qu'un seul enroulement d'excitations f (Fig. III.2).

Les équations (III.3) et (III.4) se réduisent à :

- *Equation des tensions :*

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = R_a i_a + L_a \dfrac{di_a}{dt} + \omega_m M_{fa} i_f \\ C_{em} = M_{fa} i_f i_a \end{cases} \qquad \text{(II.17)}$$

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ M_{fa} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix} \qquad \text{(II.18)}$$

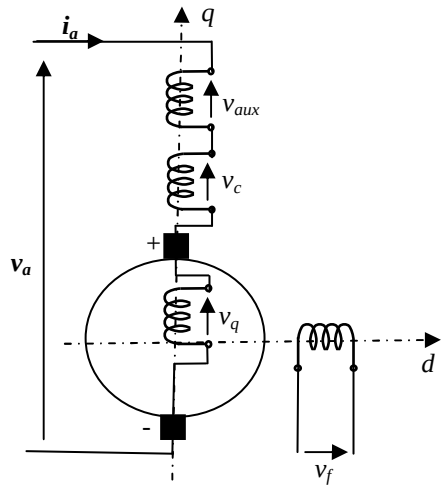


Fig. III.2 : Schéma équivalent d'un Moteur à excitation séparée

- **Moteur à excitation shunt**

En fonctionnement moteur à excitation shunt (Fig. III.3), on aura

$v_a = v_f$ et $i = i_a + i_f$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = v_f = R_a i_a + L_a \dfrac{di_a}{dt} + \omega_m M_{fa} i_f \end{cases} \quad \text{(II.19)}$$

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ M_{fa} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix} \quad \text{(II.20)}$$

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em} = M_{fa} i_f i_a \quad \text{(II.21)}$$

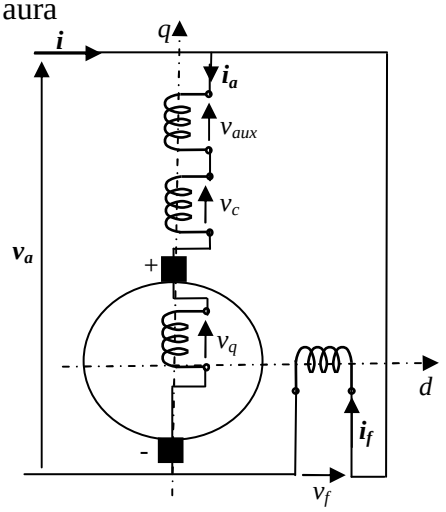


Fig. III.3 : Schéma équivalent d'un Moteur à excitation shunt

- **Moteur à excitation série**

En fonctionnement moteur à excitations série (Fig. III.4), on aura :

$v = v_f + v_s$ et $i_a = i_s$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_s = R_s i_s + L_s \dfrac{di_s}{dt} \\ v_a = R_a i_a + L_a \dfrac{di_a}{dt} + \omega_m M_{sa} i_a \\ v = (R_a + R + \omega_m M_{sa}) i_a + (L_a + L_s) \dfrac{di_a}{dt} \end{cases} \quad \text{(II.22)}$$

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ M_{fa} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix} \quad \text{(II.23)}$$

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em} = M_{sa} i_a^2 \quad \text{(II.24)}$$

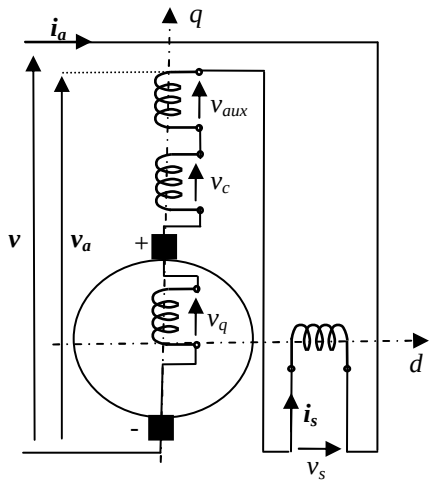


Fig. III.4 : Schéma équivalent d'un Moteur à excitation série.

- **Moteur à excitation composée**

En fonctionnement moteur à excitations série (Fig. III.5) :

$v = v_f + v_s$, $v_a = v_f$, $i_s = i_f + i_a$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + (L_f + M_{fs})\dfrac{di_f}{dt} + M_{fs}\dfrac{di_a}{dt} \\ v_s = R_s(i_s + i_a) + L_s\dfrac{di_a}{dt} + (M_{fs} + L_s)\dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = (R_a + \omega_m M_{sa})i_a + L_a\dfrac{di_a}{dt} + \omega_m(M_{fa} + M_{sa})i_f \\ v = (R_a + R_s + \omega_m M_{sa})i_a + (L_a + L_s)\dfrac{di_a}{dt} + (M_{fs} + L_s)\dfrac{di_f}{dt} + \\ + (\omega_m M_{fa} + \omega_m M_{sa} + R_s)i_f \end{cases} \quad \text{(II.25)}$$

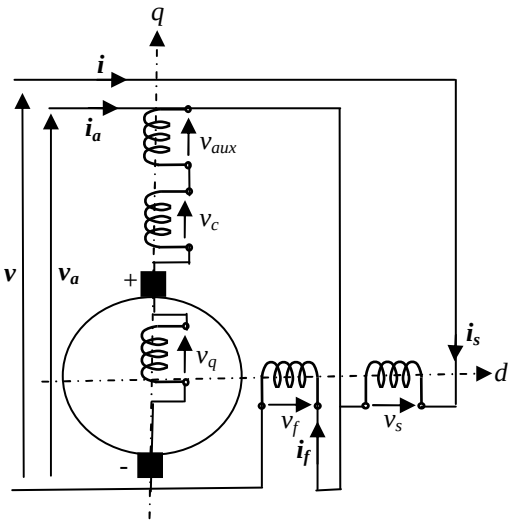


Fig. III.5 : Schéma équivalent d'un Moteur à excitations composée

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M_{fs} & 0 \\ M_{fs} & L_s & 0 \\ M_{fa} & M_{sa} & 0 \\ 0 & 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_s \\ i_a \end{bmatrix} \quad \text{(II.26)}$$

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em} = (M_{fa} + M_{sd})i_f i_a + M_{sd} i_a^2 \quad \text{(II.27)}$$

III.2.2 Fonctionnement en Génératrice

Les équations obtenues lors du fonctionnement en moteur seront considérées en fonctionnent génératrice avec un changement de signe du courant d'induit, du couple et de la puissance.

- **Génératrice à excitation séparée**

On effectue un changement de signe sur les expressions, on aura (Fig. III.6):

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + L_f\dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = R_a i_a + L_a\dfrac{di_a}{dt} + \omega_m M_{fa} i_f \\ C_{em} = M_{fa} i_f i_a \end{cases} \quad \text{(II.28)}$$

-Equation des flux :

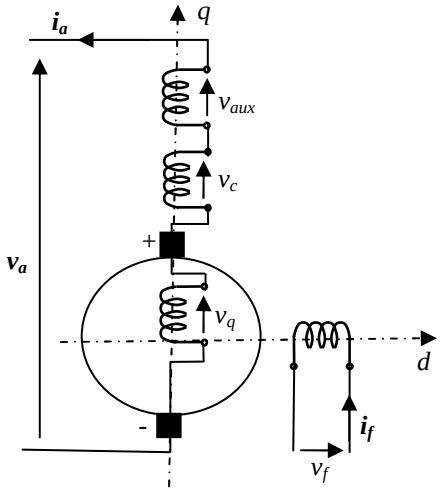


Fig. III.6 : Schéma équivalent d'une génératrice à excitation séparée

$$\begin{bmatrix}\psi_f\\ \psi_d\\ \psi_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_f & 0\\ M_{fa} & 0\\ 0 & L_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_f\\ i_a\end{bmatrix} \qquad \text{(II.29)}$$

- *Expression du couple électromagnétique.*

$$C_{em}=-M_{fa}i_f i_a \qquad \text{(II.30)}$$

- **Génératrice à excitation shunt**

En fonctionnement génératrice à excitation shunt (Fig. III.7):

$v_a=v_f$ et $i=i_a-i_f$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_f=R_f i_f+L_f\dfrac{di_f}{dt}\\ v_a=v_f=-R_a i_a-L_a\dfrac{di_a}{dt}+\omega_m M_{fa} i_f\end{cases} \qquad \text{(II.31)}$$

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix}\psi_f\\ \psi_d\\ \psi_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_f & 0\\ M_{fa} & 0\\ 0 & L_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_f\\ i_a\end{bmatrix} \qquad \text{(II.32)}$$

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em}=-M_{fa}i_f i_a \qquad \text{(II.33)}$$

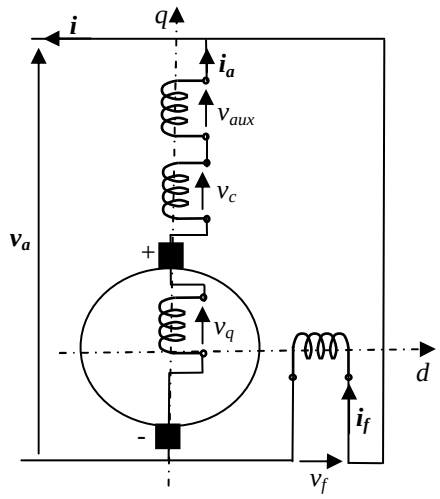


Figure III.7 : Schéma équivalent d'un Moteur à excitation shunt

- **Génératrice à excitation série**

En fonctionnement génératrice à excitations série (Fig. III.8) :

$v=v_f+v_s$ et $i_a=i_s$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_s=R_s i_s+L_s\dfrac{di_s}{dt}\\ v_a=R_a i_a+L_a\dfrac{di_a}{dt}+\omega_m M_{sa} i_a\\ v=(R_a+R+\omega_m M_{sa})i_a+(L_a+L_s)\dfrac{di_a}{dt}\end{cases} \qquad \text{(II.34)}$$

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix}\psi_f\\ \psi_d\\ \psi_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_f & 0\\ M_{fa} & 0\\ 0 & L_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_f\\ i_a\end{bmatrix} \qquad \text{(II.35)}$$

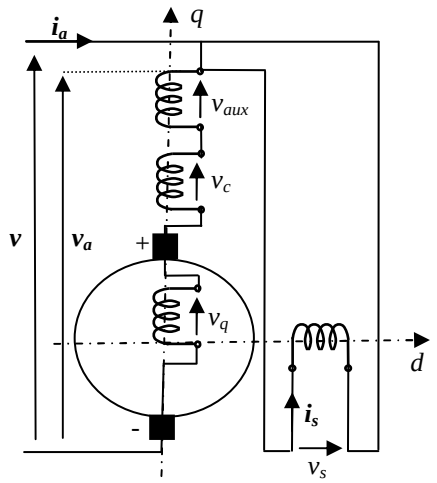


Figure III.8 : Schéma équivalent d'une génératrice à excitation sérié

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em} = M_{sa} i_a^2 \qquad \text{(II.36)}$$

- **Génératrice à excitation composée**

En fonctionnement génératrice à excitations série (Fig. III.9) :

$v = v_f + v_s$, $v_a = v_f$, $i_s = i_a - i_f$

- Equation des tensions :

$$\begin{cases} v_f = R_f i_f + (L_f + M_{fs})\dfrac{di_f}{dt} + M_{fs}\dfrac{di_a}{dt} \\ v_s = R_s(i_a - i_f) + L_s\dfrac{di_a}{dt} + (M_{fs} - L_s)\dfrac{di_f}{dt} \\ v_a = (-R_a + \omega_m M_{sa})i_a - L_a\dfrac{di_a}{dt} + \omega_m(M_{fa} - M_{sa})i_f \\ v = -(R_a + R_s - \omega_m M_{sa})i_a - (L_a + L_s)\dfrac{di_a}{dt} + (M_{fs} - L_s)\dfrac{di_f}{dt} + \\ + (\omega_m M_{fa} - \omega_m M_{sa} + R_s)i_f \end{cases} \qquad \text{(II.37)}$$

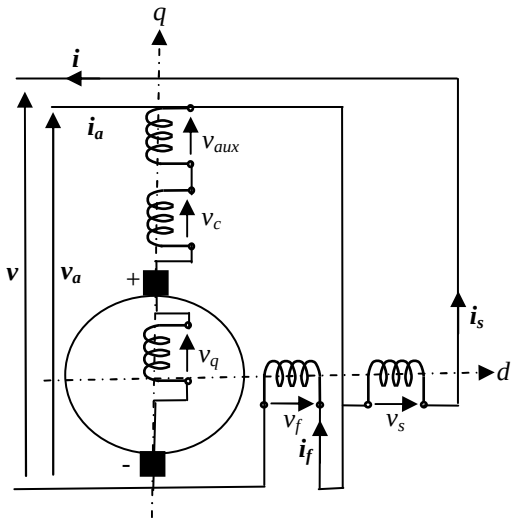


Figure III.9 : Schéma équivalent d'une génératrice à excitations composée

-Equation des flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & M_{fs} & 0 \\ M_{fs} & L_s & 0 \\ M_{fa} & M_{sa} & 0 \\ 0 & 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_s \\ i_a \end{bmatrix} \qquad \text{(II.38)}$$

-Expression du couple électromagnétique :

$$C_{em} = (M_{fa} - M_{sd})i_f i_a + M_{sd} i_a^2 \qquad \text{(II.39)}$$

III.3 Exercices

- **Exercice 1 :**

On considère la machine à courant continu à excitation séparée de la Fig. III.11. Cette machine possède *p* paires de pôles. Elle se compose d'un bobinage statorique L_f sur l'axe *d* de résistance R_f d'un bobinage à collecteur (induit) L_a sur l'axe *q* de résistance R_a. Soit M_{fa} l'inductance mutuelle stator-induit. La vitesse de rotation de la MCC est nommée Ω_m.

1. Quel est le mode de fonctionnement adopté ?
2. Ecrire l'équation électrique qui régit le fonctionnement de cette MCC.
3. Trouver l'expression du couple électromagnétique.
4. En supposant que la machine entraîne une charge $\boldsymbol{C_r}$ et que l'ensemble possède une inertie $\boldsymbol{J}$, écrire l'équation mécanique du mouvement de cette machine. (soit $\boldsymbol{f}$ le coefficient de

frottement visqueux).

5. L'induit de la machine est supposée être alimenté par une tension alternative de valeur efficace V_a et de pulsation ω_a. On demande de calculer (en grandeur complexe) le courant I_a absorbé par la machine en régime permanent.

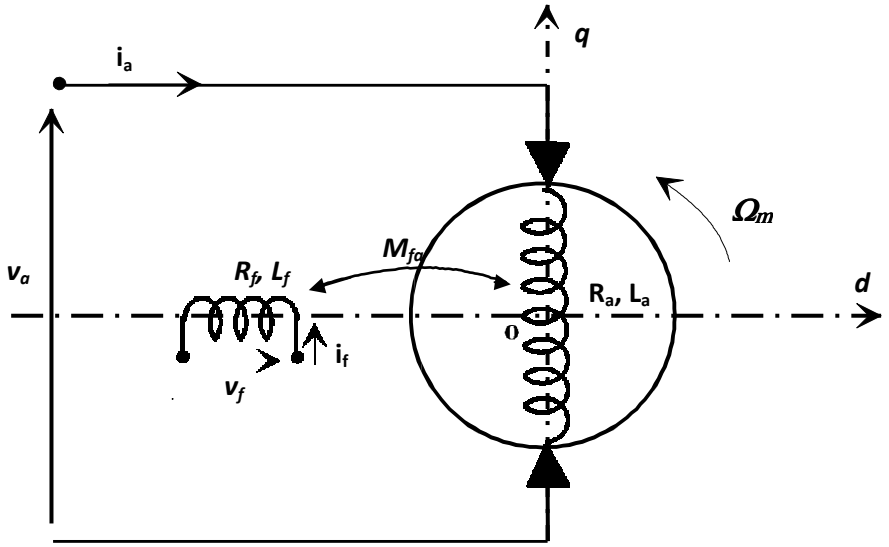


Fig. III.10 : *Représentation de la MCC*

- **Exercice 2 :**

Nous nous proposons d'étudier un moteur à courant continu série à pôles lisses (*Fig. III.12*). Cette machine est du type "machine à collecteur" et possède p paires de pôles. Elle se compose d'un bobinage statorique L_f d'axe d de résistance R_f et d'un bobinage à collecteur L_a d'axe q de résistance R_a. Ces deux bobinages sont montés en série et leur mutuelle induction est égale à M_{af}. La vitesse mécanique est nommée Ω.

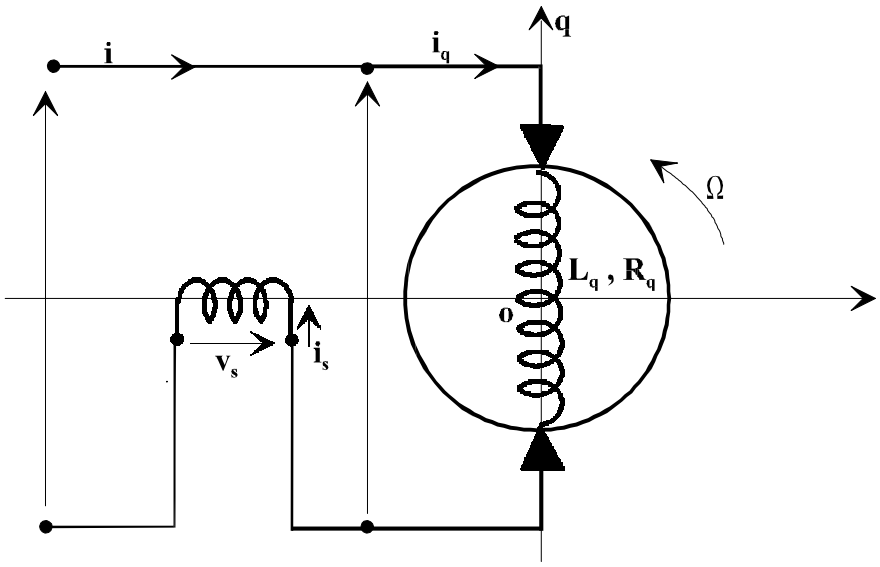


Fig. III.11 : *Représentation de la MCC*

1. L'équation électrique qui régit le fonctionnement du moteur à courant continu. En déduire Quel est sa pulsation électrique ω_m?
2. Ecrire l'énergie électromagnétique les forces électromotrices de transformation et de rotation du bobinage rotorique.
3. A partir de emmagasinée par l'ensemble du système, trouver l'expression du couple électromécanique.
4. En supposant que la machine entraîne une charge $\boldsymbol{C_{ch}}$ et que l'ensemble possède une inertie $\boldsymbol{J}$, écrire l'équation mécanique du mouvement de cette machine. (soit $\boldsymbol{f}$ le coefficient de frottement visqueux).
5. Dans la suite de l'exercice, cette machine est supposée être alimentée par une tension alternative de valeur efficace V et de pulsation ω_e. On demande de calculer (en grandeur complexe) le courant I absorbé par la machine en régime permanent.
6. En supposant le courant $i(t)$ sinusoïdal, que devient l'expression du couple électromécanique en fonction du temps? Donner la valeur moyenne du couple électromécanique. Dans quelles applications, ce type de moteur, est-il couramment utilisé?

- **Exercice 3 :**

On considère un moteur à courant continu à excitation shunt possède $\boldsymbol{p}$ paires de pôles. il est composé d'un bobinage statorique (R_f , L_f) et d'un bobinage induit(R_a, L_a). Soit M_{fa} l'inductance mutuelle inducteur-induit. Sa vitesse de rotation est nommée $\boldsymbol{\Omega_m}$. En supposant que le moteur possède une inertie J. Soit f le coefficient de frottement visqueux.

1. Représenter le schéma équivalent de ce moteur ;
2. Etablir le modèle mathématique qui régit le fonctionnement de ce moteur ;
3. Mettre ce modèle mathématique sous forme matricielle ;
4. En supposant que le flux inducteur est constant, écrire le modèle mathématique de ce moteur sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\Omega}_m \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_a \\ \Omega_m \end{bmatrix} + [B] u_a$$

Avec [A] et [B] sont deux matrices à déterminées.

- **Exercice 4 :**

On considère un moteur à courant continu à excitation composée possède ***p*** paires de pôles. il est composé : d'un bobinage inducteur parallèle $(u_{f_1}, i_{f_1}, R_{f_1}, L_{f_1})$, un bobinage inducteur série $(u_{f_2}, i_{f_2}, R_{f_2}, L_{f_2})$ et d'un bobinage induit (u_a, i_a, R_a, L_a). Soit $M_{a\,f1}$ et $M_{a\,f2}$ les inductances mutuelles inducteurs-induit. Sa vitesse de rotation est nommée Ω_m.

En supposant que la machine entraîne une charge $\boldsymbol{C_r}$ et que l'ensemble possède une inertie ***J***, écrire l'équation mécanique du mouvement de cette machine. Soit *f* le coefficient de frottement visqueux.

1. Représenter le schéma équivalent de ce moteur ;
2. Etablir le modèle mathématique qui régit le fonctionnement de ce moteur ;
3. En supposant que le flux inducteurs est constant, écrire le modèle mathématique de ce moteur sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\Omega}_m \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_a \\ \Omega_m \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} u_{f1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec : $i = i_{f1} + i_{f2}$, $[A]$ et $[B]$ sont deux matrices à déterminées.

CHAPITRE IV :
MODELISATION DES MACHINES ASYNCHRONES

IV.1. Modèle de la machine asynchrone triphasée linéaire

Pour atteindre de bonnes performances dynamiques dans la commande des machines asynchrones, il est nécessaire de disposer d'un modèle qui représente fidèlement le comportement de la machine non seulement en régimes permanents mais également en régimes transitoires. Les différents modèles développés en littérature sont basés sur un certain nombre d'hypothèses classiques à savoir: la répartition sinusoïdale des forces magnétomotrices, le phénomène d'hystérésis et la saturation du circuit magnétique sont négligés, l'entrefer est constant, les résistances ne varient pas avec la température. Si ces hypothèses sont suffisantes pour simplifier l'étude et assurer une certaine linéarité entre les grandeurs électriques et magnétiques, la mise en œuvre du modèle linéaire se heurte à des difficultés. En effet la machine asynchrone triphasée tant au stator qu'au rotor, le cas d'une machine à cage pouvant être traité comme une machine à rotor bobiné équivalent, présente dans les équations de fonctionnement des termes en fonction du temps. L'utilisation des transformations de Park, de Ku etc., permet de lever cette difficulté et de simplifier les équations.

IV.1. 1 Modèle real *abc* de la machine asynchrone triphasée

La machine asynchrone est constituée de trois enroulements logés symétriquement dans les encoches du stator et de la cage conductrice intégrée au rotor. Indépendamment de la technique employée, le rotor est assimilable à trois enroulements identiques parfaitement symétriques et en court-circuit. La Fig. 1 donne une représentation symbolique de la machine où les enroulements statoriques sont déphasés de $2\pi/3$ dans l'espace. La cage du rotor peut être modélisée aussi par trois enroulements déphasés de $2\pi/3$. Cette représentation simplifiée du rotor ne permet pas d'accéder à la connaissance du courant circulant effectivement dans chaque barre mais conduit à une traduction assez fidèle de l'influence des barres rotoriques sur le comportement de la machine. L'angle θ représente la position du rotor.

Pour établir les équations de fonctionnement de la machine asynchrone triphasée nous utilisons les vecteurs de variables suivants:

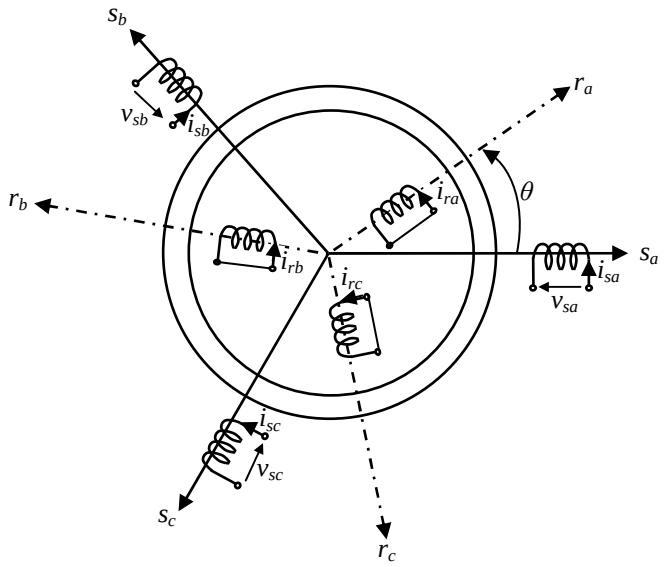


Fig. IV.1 Disposition des enroulements de la machine asynchrone triphasée

$[V_s]=[v_{sa},v_{sb},v_{sc}]^T$: Vecteur des tensions instantanés des phases *a*, *b* et *c* statoriques ;

$[I_s]=[i_{sa},i_{sb},i_{sc}]^T$: Vecteur des courants instantanés des phases *a*, *b* et *c* statoriques ;

$[\Psi_s]=[\psi_{sa},\psi_{sb},\psi_{sc}]^T$: Vecteur des flux instantanés des phases *a*, *b* et *c* statoriques ;

$[V_r]=[v_{ra},v_{rb},v_{rc}]^T$: Vecteur des tensions instantanés des phases *a*, *b* et *c* rotoriques ;

$[I_r]=[i_{ra},i_{rb},i_{rc}]^T$: Vecteur des courants instantanés des phases *a*, *b* et *c* rotoriques ;

$[\Psi_r]=[\psi_{ra},\psi_{rb},\psi_{rc}]^T$: Vecteur des flux instantanés des phases *a*, *b* et *c* rotoriques ;

- **Equations des tensions**

La symétrie de la machine asynchrone dans le cas d'une alimentation sinusoïdale équilibrée permet d'écrire les équations des tensions sous la forme matricielle suivante :

$$[V_s]=[R_s][I_s]+\frac{d}{dt}[\Psi_s] \qquad \text{(IV.1)}$$

$$[V_r]=0=[R_r][I_r]+\frac{d}{dt}[\Psi_r] \qquad \text{(IV.2)}$$

Où :

$$[R_s]=\begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} ; \quad [R_r]=\begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

Avec :

R_s et R_r : Les résistances des enroulements statoriques et rotoriques de la MAS. Ces résistances peuvent être déterminées facilement à l'aide d'essais classiques.

- **Equations des flux**

Dans l'hypothèse du non saturation et en se basant sur la théorie des machine électrique généralisée exposée dans le chapitre II (§II.2.1), il est possible d'exprimer les flux magnétiques en fonction des courants et des différentes inductances propres et mutuelles de la MAS, sous forme matricielle, comme suit :

$$[\psi_s] = [L_s][I_s] + [M_{sr}][I_r] \quad \text{(IV.3)}$$

$$[\psi_r] = [L_r][I_r] + [M_{rs}][I_s] \quad \text{(IV.4)}$$

Où :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_S & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix} ; \qquad [L_r] = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix} ;$$

$$[M_{sr}] = [M_{rsr}]^T = M_0 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Avec :

l_s *et* l_r: Les inductances propres statoriques et rotoriques.

m_s et m_r : Les inductances mutuelles entre deux phases statoriques et entre deux phases rotoriques de la MAS, respectivement ;

M_0 : La valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase statorique et une phase rotorique ;

θ : L'angle électrique entre une phase statorique et une autre rotorique.

- **Expression du couple électromagnétique**

L'expression du couple électromagnétique est obtenue par dérivation de la Co-énergie, (Chapitre I : § I.2.2):

$$C_{em} = \frac{\partial W_{co}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix} \quad \text{(IV.5)}$$

Les sous matrices $[L_s]$ et $[L_r]$ contiennent des termes constants, seules les matrices $[M_{sr}]$ et $[M_{rs}]$ dépendent de l'angle θ, la relation (IV.5) se simplifie à:

$$C_{em} = [I_s]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [M_{sr}] \right\} [I_r] \quad \text{(IV.6)}$$

- **Equation mécanique**

L'étude des régimes transitoires fait intervenir en plus des grandeurs électriques les grandeurs mécaniques. Ainsi, pour compléter le modèle, nous devons ajouter l'équation mécanique déduite à partir de loi fondamentale de la dynamique:

$$C_{em} - C_r - K_f \Omega_m = J \frac{d\Omega_m}{dt} \quad \text{(IV.7)}$$

Où :

C_{em} : Le couple électromagnétique de la MAS ;

C_r : Le couple résistant (statique) à l'arbre de la machine ;

J : Le moment d'inertie ;

K_f : Le coefficient de frottement ;

Ω_m : La vitesse angulaire mécanique du rotor.

IV.1. 2 Modèle de Park de la machine asynchrone triphasée

Les relations (IV.1) à (IV.6) constituent un modèle électromécanique complet de la machine asynchrone triphasée, conformément aux hypothèses simplificatrices. On peut constater que le système d'équations n'est pas simple et certaines matrices d'inductances dépendent de la position relative du rotor par rapport au stator. Cela présente une difficulté pour la résolution du système d'équations particulièrement lors de l'étude des phénomènes transitoires. Afin de s'affranchir de cet obstacle, la transformation de Park est utilisée pour obtenir une formulation plus simple. Ainsi les enroulements statoriques et rotoriques sont transformés en enroulements orthogonaux.

Il nous a paru utile d'attribuer aux enroulements triphasés du stator et du rotor deux enroulements biphasé équivalent comme suit :

- A l'enroulement triphasé du stator s_a, s_b, s_c va correspondre l'enroulement s_d , s_q qui tourne à la vitesse arbitraire $\omega_a = d\theta_a/dt$ par rapport au stator qui est fixe.
- A celui du rotor r_a, r_b, r_c va correspondre l'enroulement r_d, r_q qui tourne à la vitesse $\omega_r = d\theta_r/dt$, par rapport au rotor qui tourne à la vitesse angulaire de rotation $\omega_m = d\theta/dt$.

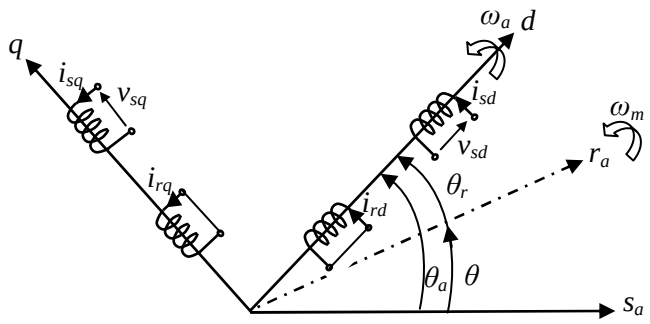


Fig. IV.2 Représentation de la transformation de Park de la MAS.

Le choix du référentiel va dépendre de l'angle de la transformation, pour $\theta_a = 0$ ou $\theta_a = \theta$ le référentiel sera lié respectivement au stator ou au rotor tandis que pour $\theta_a = \theta_s$, le référentiel sera lié au synchronisme. Nous considérons que la machine est symétrique et équilibrée de ce fait la composante homopolaire sera négligée. Les grandeurs statoriques et rotoriques sont alors exprimées dans un même repère comme le montre la Fig. VI.2.

D'après la théorie généralisée des machines électriques exposée dans le chapitre II, il est donc possible définir une matrice de Park [*P*], permettant le passage des composantes triphasés (*a*, *b*, *c*) aux composantes biphasés (*d*, *q*) tel que :

$$[x_{dq}] = [P(\theta_a)][x_{abc}] \tag{IV.8}$$

$$Avec : [P(\theta_a)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a) & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_a) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Avec θ_a représente l'angle de rotation du repère (*d*,*q*), $\theta_a = \theta_s$ pour les grandeurs statoriques et $\theta_a = \theta_r$ pour les grandeurs rotoriques.

- **Equations des tensions**

Les équations des tensions de la MAS dans le référentiel arbitraire (*d*, *q*) sont données par:

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \dfrac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_a \psi_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \dfrac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_a \psi_{sd} \\ v_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \dfrac{d\psi_{rd}}{dt} - (\omega_a - \omega_m)\psi_{rq} \\ v_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \dfrac{d\psi_{rq}}{dt} + (\omega_a - \omega_m)\psi_{rd} \end{cases} \tag{IV.9}$$

Avec respectivement :

v_{sd}, v_{sq}, v_{rd} et v_{rq} : Les tensions statoriques et rotoriques directs et en quadrature ;

i_{sd}, i_{sq}, i_{rd} et i_{rq} : Les courants statoriques et rotoriques directs et en quadrature ;

ψ_{sd}, ψ_{sq}, ψ_{rd} et ψ_{rq} : Les flux statoriques et rotoriques directs et en quadrature.

- **Equations des flux**

Les flux dans l'équation (IV.9) sont obtenus à partir du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_s i_{sd} + M i_{rd} \\ \psi_{sq} = L_s i_{sq} + M i_{rq} \\ \psi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd} \\ \psi_{rq} = L_r i_{rq} + M i_{sq} \end{cases} \quad \text{(IV.10)}$$

Avec respectivement :

L_s et L_r : Les inductances cycliques statoriques et rotoriques de la MAS, respectivement ;

M : L'inductance mutuelle cyclique entre le stator et le rotor (inductance magnétisante) ;

Où :

$$\begin{cases} L_s = l_s - m_s \\ L_r = l_r - m_r \\ M = \dfrac{3}{2} M_0 \end{cases} \quad \text{(IV.11)}$$

- **Expression du couple électromagnétique**

L'expression du couple est obtenue en appliquant la transformation de Park à la relation (IV.6) et en tenant compte de l'expression (IV.10), nous pouvons avoir plusieurs expressions du couple électromagnétique toutes égales :

$$\begin{cases} C_{em} = p(\psi_{rq} i_{rd} - \psi_{rd} i_{rq}) \\ C_{em} = p(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) \\ C_{em} = pM(i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \\ C_{em} = p\dfrac{M}{L_s}(\psi_{sd} i_{rq} - \psi_{sq} i_{rd}) \end{cases} \quad \text{(IV.12)}$$

IV.2 Modèle de la machine asynchrone triphasée saturée

Le modèle simplifié ne prend pas en compte la saturation du circuit magnétique. Or, dans la plupart des cas, la machine fonctionne en régime saturé. Il nous est paru nécessaire de prendre en compte ce phénomène dans le modèle afin d'accroître sa précision. La saturation des

matériaux ferromagnétiques est un phénomène physique complexe difficile à modéliser. Dans les machines électriques, la saturation apparaît d'abord dans les zones ou la section de passage des lignes de champ est la plus faible (comme les dents entre les encoches). Il s'agit donc d'un phénomène local. Différentes méthodes sont envisageables pour prendre en compte la saturation du circuit magnétique:

- La méthode la plus précise consiste à définir la géométrie exacte de la machine et de calculer le flux magnétisant à partir de l'induction d'entrefer en tenant compte des chutes de potentiel magnétique à travers la partie ferromagnétique de la machine. On résout alors les équations de Maxwell associées aux lois de comportement des matériaux employés en utilisant les méthodes numériques.

-Méthode du réseau de perméances : elle consiste à découper l'ensemble de la machine en petites portions magnétiques homogènes et d'associer à chaque perméance élémentaire la caractéristique magnétique du matériau correspondant.

-Méthode globale: la saturation est prise en compte par l'intermédiaire de la courbe de variation de l'inductance magnétisante en fonction du courant associé.

L'introduction de la saturation dans les deux premières méthodes n'est guère chose aisée,

- d'une part parce qu'elle intervient dans des parties distinctes de la machine, et à des degrés différents, et qu'elle introduit des harmoniques d'espaces supplémentaires dans l'induction au niveau de l'entrefer de la machine.

- d'autre part parce que ces méthodes font appel au calcul numérique du champ électromagnétique dans lesquelles la saturation des inductances de fuite n'est plus négligeable.

Tous ces effets aboutissent à une modélisation complexe très lourde à manipuler. Ainsi, nous préférons du point du vue pratique utilisé la dernière méthode. En effet, la transformation de Park étant, comme toute, une transformation mathématique des grandeurs statoriques et rotoriques, rien n'empêche, a priori, de l'appliquer à une machine saturée. Néanmoins, avant de passer à la modélisation, il faut tenir compte de certaines hypothèses citées auparavant en régime linéaire. En effet, la répartition spatiale de la FMM statorique est considérée comme sinusoïdale ou, ce qui revient au même, que seul le fondamental de l'induction participe aux flux statoriques. Cette hypothèse simplifie grandement le calcul des inductances statoriques.

En revanche quand la saturation intervient, les harmoniques d'espace d'induction contribuent aux flux statoriques, et par conséquent, les inductances dans les deux axes en quadrature

seront fonction, non seulement des courants, mais, aussi, de la position du rotor. Dans ce cas la transformation de Park perd de son intérêt pratique. Ainsi, l'hypothèse de la répartition spatiale sinusoïdale de l'induction est maintenue même en régime saturé. L'avantage est que les inductances dans les deux axes en quadrature ne dépendent plus de la position du rotor.

Pour prendre en considération la saturation du circuit magnétique, le flux propre d'un enroulement peut être considéré comme la superposition d'un flux de fuites se refermant dans l'air et d'un flux utile parcourant le circuit magnétique. Pour les flux de fuites (têtes de bobines, encoches statoriques), l'hypothèse de linéarité reste valable pour un fonctionnement normal, dans la mesure où les courants n'atteignent pas des valeurs excessives, ce qui est le cas pour une machine conçue pour être commandée vectoriellement. Ainsi, les chercheurs font généralement comme première hypothèse que les inductances de fuites stator et rotor sont constantes. Ceci implique que seuls les flux mutuels sont sujets à la saturation du circuit magnétique.

Une deuxième étape peut être franchie en introduisant le phénomène de saturation croisée qui se traduit par l'interdépendance des équations électromagnétiques ramenées aux axes *d* et *q* : dans les pôles de la machine, les flux ψ_{sd} et ψ_{sq} participent tous les deux à la saturation et pas seulement ψ_{sd}, le flux magnétisant d'axe direct dépend du courant magnétisant d'axe *q* et vice versa.

IV.2.1 Equations des flux

Les quantités des flux ψ_s et ψ_r sont beaucoup plus compliquées à évaluer avec précision du fait d'une part de l'interaction entre les trois phases statoriques et rotoriques entre elles et d'autre part de l'interaction stator-rotor. L'autre difficulté réside aussi dans le trajet emprunté par les lignes de champ des grandeurs ψ_s et ψ_r. Pour l'expliciter sommairement nous allons considérer deux cas (Fig. IV.3):

1- Les lignes de champ du flux statorique traversent l'entrefer, nous introduisant alors le terme de flux magnétisant ψ_m ;
2- Les lignes de champ ne traversent pas l'entrefer, nous introduisant alors le terme de flux de fuite ψ_σ.

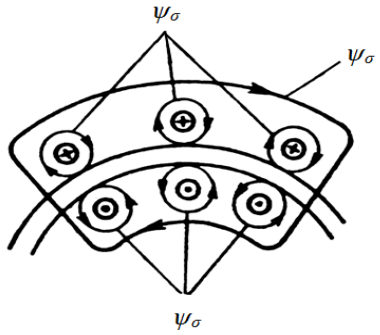


Fig. IV.3 Lignes de champ de ψ_m et ψ_σ

Si dans le premier cas c'est clair, dans le second ce n'est pas évident car le trajet des lignes pour le flux de fuite est assez complexe et peut être complètement dans l'air comme c'est le cas des têtes de bobine, Fig. IV.4.

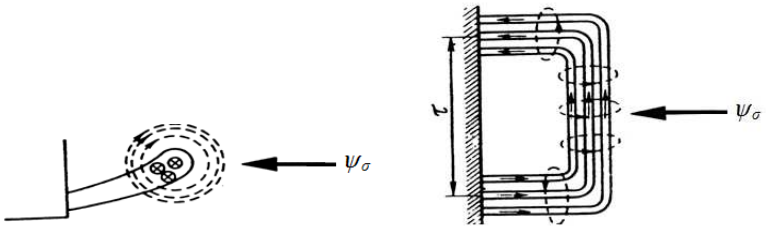


Fig. IV.4 Flux de fuite dans les têtes de bobines

Le fait de ne pas pouvoir séparer les flux de fuite rend leur localisation impossible. Ceci permet de les affecter soit au stator, soit au rotor et pouvoir également travailler avec l'hypothèse d'égalité des fuites. Nous pouvons alors décomposer le flux total statorique ou rotorique désigné par ψ comme étant la somme d'un flux de fuite ψ_σ et d'un flux magnétisant ψ_m.

$$\psi = \psi_\sigma + \psi_m \qquad \text{(IV.13)}$$

Nous allons mettre à profit cette décomposition pour expliciter certaines inductances que nous utiliserons par la suite dans le cas où toutes les grandeurs rotoriques seraient ramenées au stator (Fig. IV.5).

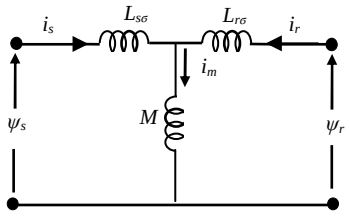


Fig. IV.5 Représentation des flux et des inductances par phase

Les composantes des flux statoriques et rotoriques peuvent être exprimées en fonction du flux magnétisant par:

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_{s\sigma} i_{sd} + \psi_{md} \\ \psi_{sq} = L_{s\sigma} i_{sq} + \psi_{mq} \\ \psi_{rd} = L_{r\sigma} i_{rd} + \psi_{md} \\ \psi_{rq} = L_{s\sigma} i_{rq} + \psi_{md} \end{cases} \quad \text{(IV.14)}$$

Les inductances de fuites statoriques et rotoriques $L_{s\sigma}$ et $L_{r\sigma}$ sont considérées comme constantes. Il ne reste plus qu'à déterminer la manière dont varient les flux magnétisants, en fonction des courants circulants dans les deux axes. Le modèle de la machine étant considéré en régime saturé, l'inductance mutuelle n'est plus constante. Et puisque la machine asynchrone à cage est considérée comme une machine à pôles lisses, la détermination de sa caractéristique magnétique ne pose pas de problème car, du fait de la symétrie géométrique de la machine, l'axe du flux magnétisant est colinéaire à l'axe du courant magnétisant, de telle sorte que la courbe d'aimantation est unique et indépendante de la localisation de l'axe du flux dans la machine (Fig. IV.6). Par contre pour les machines à pôles saillants, à cause de la géométrique du rotor, les axes respectifs du flux et du courant magnétisants ne sont pas colinéaires.

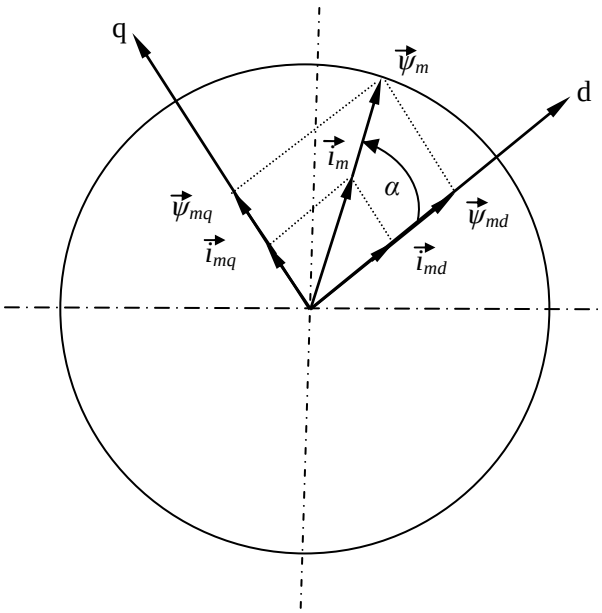


Fig. IV.6 : Représentation des vecteurs courants et flux magnétisants résultants de la machine

Contrairement au régime linéaire, dès que la saturation commence à apparaître dans l'un ou l'autre des axes *d* et *q*, les flux magnétisants suivant les deux axes sont interdépendants. Ce

phénomène de couplage est appelé effet croisé car il est dû à la saturation alors qu'il n'existe pas par construction. Ce phénomène n'existe donc pas, ou est négligeable, pour les faibles valeurs des courants magnétisants suivant les deux axes. Mais au fur et à mesure que ces courants augmentent, le couplage entre les deux axes prend de l'ampleur et devient incontournable. Ce phénomène peut être expliqué physiquement de la même manière que la réaction magnétique d'induit dans une machine à courant continu. En effet, le circuit magnétique emprunté par les lignes de champs est, pour une grande partie, le même pour les deux enroulements *d* et *q*; lorsque le courant magnétisant dans l'un des axes est assez élevé, les lignes de champ issues de cet enroulement participent activement à la saturation des parties communes, le flux magnétisant dans l'autre axe sera, par conséquent, diminué. Nous pouvons alors définir deux nouvelles mutuelles inductances (Fig. IV.7):

- Inductance mutuelle statique :

$$M = \frac{\psi_m}{i_m} \tag{IV.15}$$

- Inductance mutuelle dynamique :

$$M_{dyn} = \frac{d\psi_m}{di_m} \tag{IV.16}$$

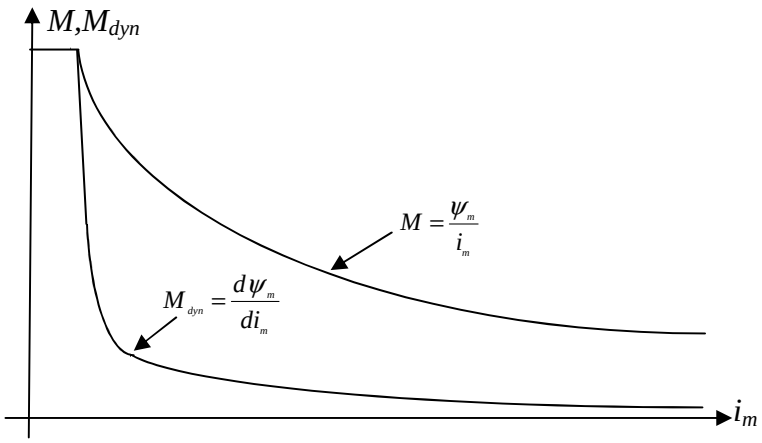


Fig. IV.7 : Inductance statique et dynamique en fonction du courant magnétisant

En vertu de ces considérations, la réécriture des équations électriques en fonction des courants revient à exprimer chacun des flux magnétisants en fonction des différents courants :

$$\psi_m = Mi_m = (\psi_{md}^2 + \psi_{mq}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{IV.17}$$

Avec :

$$\begin{cases} \psi_{md} = Mi_{md} \\ \psi_{mq} = Mi_{mq} \end{cases} ; \begin{cases} i_{md} = i_{sd} + i_{rd} \\ i_{mq} = i_{sq} + i_{rq} \end{cases} ; \begin{cases} i_{md} = i_m \cos\alpha \\ i_{mq} = i_m \cos\alpha \end{cases} ; \begin{cases} \psi_{md} = \psi_m \cos\alpha \\ \psi_{mq} = \psi_m \cos\alpha \end{cases} ; \alpha = arctg\frac{i_{mq}}{i_{md}}$$

Où α est l'angle entre le courant magnétisant i_m et sa composante directe i_{md} (Fig. IV.6).
Les expressions des dérivées des flux magnétisants se déduisent à partir de l'équation (IV.17). Comme la mutuelle inductance n'est pas constante mais varie avec le courant magnétisant, il s'en suit:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{md}}{dt} = M\frac{\partial i_{md}}{\partial t} + i_{md}\frac{\partial M}{\partial t} \\ \frac{d\psi_{mq}}{dt} = M\frac{\partial i_{mq}}{\partial t} + i_{mq}\frac{\partial M}{\partial t} \end{cases} \tag{IV.18}$$

Avec :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial i_m}\frac{\partial i_m}{\partial t} = \frac{\partial(Mi_m) - M\partial i_m}{i_m \partial i_m}\frac{\partial i_m}{\partial t} = (\frac{M_{dyn} - M}{i_m})\frac{\partial i_m}{\partial t} \tag{IV.19}$$

$$\frac{\partial i_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(i_{md}^2 + i_{mq}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial i_{md}^2}{\partial t} + \frac{\partial i_{mq}^2}{\partial t})\frac{1}{(i_{md}^2 + i_{mq}^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{IV.20}$$

D'où :

$$\frac{\partial i_m}{\partial t} = \frac{i_{md}}{i_m}\frac{\partial i_{md}}{\partial t} + \frac{i_{mq}}{i_m}\frac{\partial i_{mq}}{\partial t} = \cos\alpha\frac{\partial i_{md}}{\partial t} + \sin\alpha\frac{\partial i_{mq}}{\partial t} \tag{IV.21}$$

En substituant les équations (IV.19) et (IV.21) dans (IV.18), on aura :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{md}}{dt} = \left[M(1-\cos^2\alpha) + M_{dyn}\cos^2\alpha\right]\frac{\partial i_{md}}{\partial t} + (M_{dyn} - M)\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial i_{mq}}{\partial t} \\ \frac{d\psi_{mq}}{dt} = \left[M(1-\sin^2\alpha) + M_{dyn}\sin^2\alpha\right]\frac{\partial i_{mq}}{\partial t} + (M_{dyn} - M)\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial i_{md}}{\partial t} \end{cases} \tag{IV.22}$$

Ce système devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_{md}}{dt} = M_d \dfrac{\partial i_{sd}}{\partial t} + M_{dq} \dfrac{\partial i_{sq}}{\partial t} + M_d \dfrac{\partial i_{rd}}{\partial t} + M_{dq} \dfrac{\partial i_{rq}}{\partial t} \\ \dfrac{d\psi_{mq}}{dt} = M_q \dfrac{\partial i_{sq}}{\partial t} + M_{dq} \dfrac{\partial i_{sd}}{\partial t} + M_q \dfrac{\partial i_{rq}}{\partial t} + M_{dq} \dfrac{\partial i_{rd}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{(IV.23)}$$

Avec :

$M_d = \dfrac{(M + M_{dyn})}{2} + \dfrac{(M - M_{dyn})}{2} \cos 2\alpha$: Inductance cyclique mutuelle suivant l'axe *d* ;

$M_q = \dfrac{(M + M_{dyn})}{2} + \dfrac{(M - M_{dyn})}{2} \cos 2\alpha$: Inductance cyclique mutuelle suivant l'axe *q ;*

$M_{dq} = \dfrac{(M - M_{dyn})}{2} \sin 2\alpha$: Terme traduisant l'effet croisé de la saturation entre les axes *d* et *q*.

- **Equation des tensions**

Dans les équations des tensions, la dérivation des flux conduit à l'introduction d'inductances supplémentaires dues exclusivement à la saturation. En remplaçant les différents flux, ainsi que leurs dérivées temporelles, par leurs expressions en fonction des courants, on aura :

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + (L_{s\sigma} + M_d) \dfrac{di_{sd}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{sq}}{dt} + M_d \dfrac{di_{rd}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{rq}}{dt} - \omega_a (L_s i_{sq} + M i_{rq}) \\ v_{sd} = R_s i_{sq} + (L_{s\sigma} + M_q) \dfrac{di_{sq}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{sd}}{dt} + M_q \dfrac{di_{rq}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{rd}}{dt} + \omega_a (L_s i_{sd} + M i_{rd}) \\ v_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + (L_{r\sigma} + M_d) \dfrac{di_{rd}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{rq}}{dt} + M_d \dfrac{di_{sd}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{sq}}{dt} - \omega_r (L_r i_{rq} + M i_{sq}) \\ v_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + (L_{r\sigma} + M_q) \dfrac{di_{rq}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{rd}}{dt} + M_q \dfrac{di_{sq}}{dt} + M_{dq} \dfrac{di_{sd}}{dt} + \omega_r (L_r i_{rd} + M i_{sd}) \end{cases} \quad \text{(IV.24)}$$

Avec :

$$\omega_r = \omega_a - \omega_m$$

Ces équations sont traduites par les schémas équivalents selon les axes *d* et *q* :

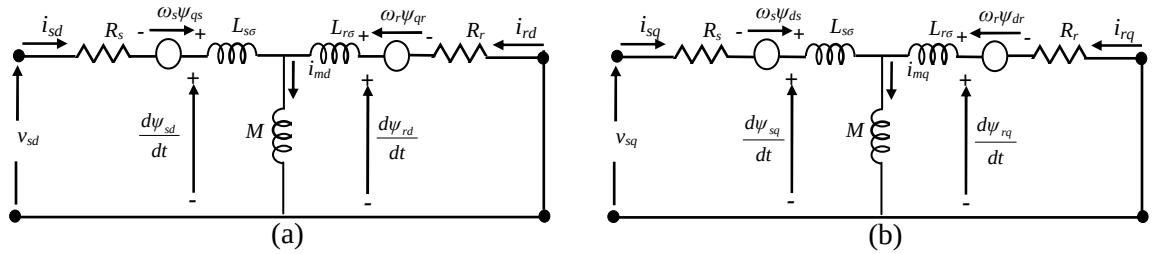


Fig. IV.8 Schéma équivalent : (a) suivant l'axe d, (b) suivant l'axe q.

Les tensions sous forme matricielle s'écrivent :

$$[V]=[L][\dot{I}]+[R][I] \tag{IV.25}$$

Avec :

$[V]=\begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $[I]=\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & i_{rd} & i_{rq} \end{bmatrix}^T$.

$$[L]=\begin{bmatrix} L_{s\sigma}+M_d & M_{dq} & M_d & M_{dq} \\ M_{dq} & L_{s\sigma}+M_d & M_{dq} & M_q \\ M_d & M_{dq} & L_{r\sigma}+M_d & M_{dq} \\ M_{dq} & M_q & M_{dq} & L_{r\sigma}+M_d \end{bmatrix}; [R]=\begin{bmatrix} R_s & -\omega_a L_s & 0 & -\omega_a M \\ \omega_a L_s & R_s & \omega_a M & 0 \\ 0 & -\omega_r M & R_r & -\omega_r M \\ \omega_r M & 0 & \omega_r L_r & R_r \end{bmatrix}$$

Comme les inductances ne sont pas constantes, mais varient avec le courant, donc avec le flux, nous sommes amenés à inverser une matrice à coefficients variables. Ces relations montrent qu'en régime dynamique les inductances de la machine sont liées à la pente de la tangente de la caractéristique magnétique au point de fonctionnement considéré. Pour résoudre le système précédent il faut connaître la loi de variation de flux magnétisant en fonction du courant magnétisant dont on déduit et en fonction du courant magnétisant.

IV.2.3 Modélisation de la caractéristique magnétique

Si dans le cas linéaire les flux sont proportionnels aux courants, la relation $\psi = Li$ permet d'écrire aisément les équations électriques de la machine dans n'importe quel référentiel. Dans le cas saturé, la variation de cette dernière inductance rend le problème beaucoup plus compliqué. Il faudrait alors trouver un modèle qui permet de décrire sa variation en fonction du courant. Deux cas peuvent se présenter, soit utiliser l'expression du flux en fonction du courant $\psi = f(i)$ Ou celle de l'inductance en fonction du courant *L=L(i).* Les allures de ψ *(i)* et de *L (i)* sont indiquées sur la Fig. IV.9.

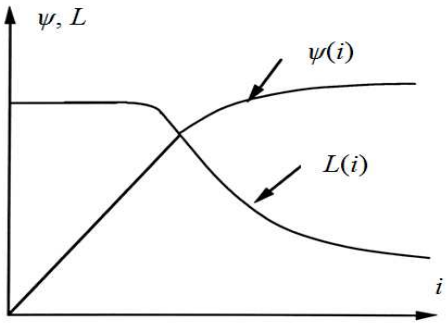


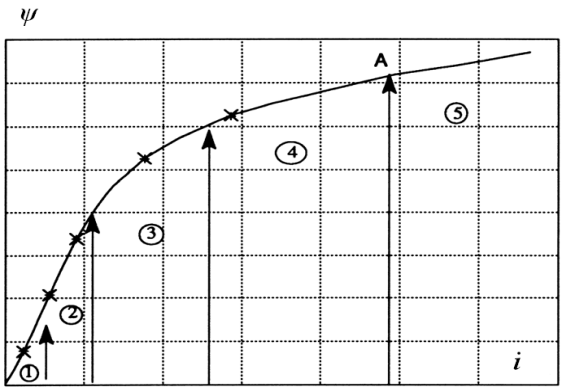
Fig. IV.9 Variation du flux et de l'inductance en fonction du courant

Dans les deux cas la formulation analytique n'est pas simple. Nous avons choisi de travailler avec l'expression du flux car il caractérise mieux l'état magnétique de la machine. On pourra ainsi exprimer les variations de $\psi_m = f(i_m)$ et pouvoir introduire le phénomène de saturation dans les équations électriques. Pour tous les points de la caractéristique et en particulier pour les fortes saturations.

Plusieurs modèles tels que les fonctions polynômes, arctg., exponentielles etc. , ont été utilisés pour couvrir l'ensemble des points. Suivant la zone de la caractéristique magnétique, on choisit un type de fonction qui permet d'avoir un modèle assez proche de la réalité. On pourra constater que cette caractéristique magnétique se divise en cinq zones, Fig. VI.10.

De l'origine jusqu'au point A (Fig. IV.10), on utilise une série de polynômes et au-delà de ce point, on utilise une droite pour couvrir la zone de la très forte saturation. On doit vérifier la continuité et la dérivabilité au point A.

Une fois la relation du flux en fonction du courant connue analytiquement, on peut déterminer le flux ψ à chaque instant à partir de $i(t)$.



1- zone à l'origine, 2- zone linéaire, 3- zone du coude de saturation,
4- zone de saturation, 5- zone de très forte saturation.

Fig. IV.10. Différentes zones de la caractéristique magnétique

IV.3 Modèle des moteurs asynchrones monophasés à condensateur permanent

Le moteur asynchrone monophasé est largement utilisé dans les applications domestiques (machine à laver, ventilateur,…) et industrielle (entrainement des pompes, conditionneurs d'air…). Le moteur monophasé est alimenté par un réseau alternatif monophasé. Les circuits magnétiques statoriques et rotoriques ainsi que la cage du moteur sont identiques à ceux du

moteur polyphasé. Le stator comporte deux enroulements, un enroulement de travail dit enroulement principale (E.P) qui occupe en générale les 2/3(ou1/2) des encoches statoriques et un enroulement auxiliaire (E.A) qui occupe le reste des encoches.

Pour la modélisation de ce genre de moteur, on adopte les mêmes hypothèses simplificatrices que dans le cas d'un moteur asynchrone triphasé étudié précédemment. Avec ces hypothèses, en se référant au schéma équivalent de la figure *IV.11*.

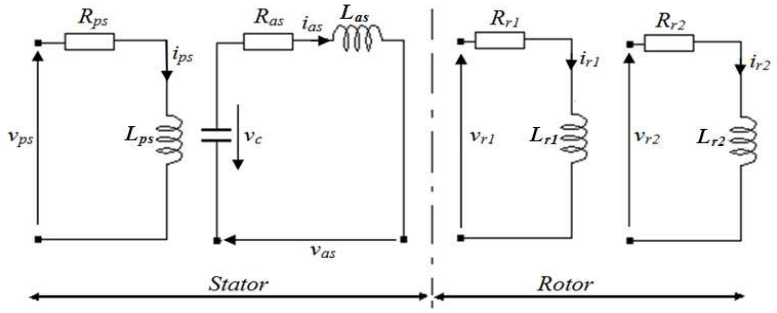


Fig. IV.11 :Schéma équivalent d'un moteur asynchrone monophasé à condensateur permanent

Avec :

L_{ps}, L_{as} *: Les* inductances propres de la phase principale et auxiliaire.

L_{r1}, L_{r2} *: Les* inductances propres des deux phases rotoriques fictives.

R_{ps}, R_{as} *:* Les résistances de la phase principale et auxiliaire du stator.

R_{r1}, R_{r2} *: Les* résistances fictives des deux phases rotoriques.

IV.3.1 Modèle réel du moteur monophasé à condensateur permanent :

La Fig. VI.12 représente les enroulements statorique et rotorique d'un moteur asynchrone monophasé à condensateur permanent.

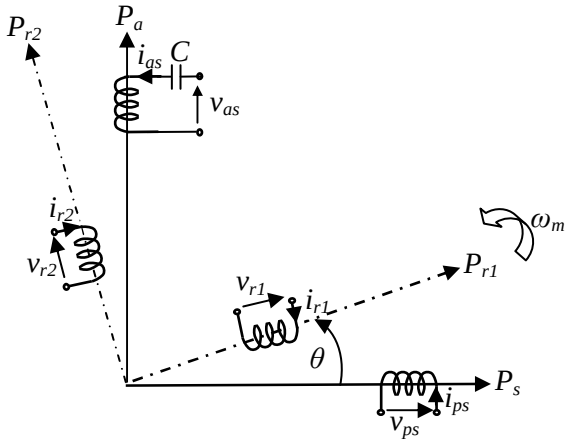


Fig. IV.12 : Modèle réel d'un moteur asynchrone monophasé à condensateur permanent

- **Équations des tensions :**

En se basant sur le schéma équivalent du moteur asynchrone monophasé à condensateur permanent représenté par la Fig VI.11 et sur la représentation de ses différents enroulements illustrés par la Fig. VI.12, les équations électriques de fonctionnement de ce moteur s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} v_{ps} = R_{ps} i_{ps} + \dfrac{d\psi_{ps}}{dt} \\ v_{as} = R_{as} i_{as} + \dfrac{d\psi_{as}}{dt} + v_c \end{cases} \quad \text{(IV.26)}$$

$$\begin{cases} v_{r1} = R_{r1} i_{r1} + \dfrac{d\psi_{r1}}{dt} \\ v_{r2} = R_{r2} i_{r2} + \dfrac{d\psi_{r2}}{dt} \end{cases} \quad \text{(IV.27)}$$

Sous forme matricielle :

$$[v_{pas}] = [R_{pas}][i_{pas}] + \frac{d}{dt}[\psi_{pas}] + [v_c] \quad \text{(IV.28)}$$

$$[v_{r12}] = [R_{r12}][i_{r12}] + \frac{d}{dt}[\psi_{r12}] \quad \text{(IV.29)}$$

Avec :

$$[v_{pas}] = [v_{ps} \quad v_{as}]^T \; ; \; [i_{pas}] = [i_{ps} \quad i_{as}]^T \; ; \; [v_{r12}] = [v_{r1} \quad v_{r2}]^T \; ; \; [i_{r12}] = [i_{r1} \quad i_{r2}]^T \; ; \; [v_c] = [0 \quad v_c]^T$$

$$[R_{pas}] = \begin{bmatrix} R_{ps} & 0 \\ 0 & R_{as} \end{bmatrix} ; [R_{r12}] = \begin{bmatrix} R_{r1} & 0 \\ 0 & R_{r2} \end{bmatrix}$$

- **Equations des flux *:***

En se basant sur la représentation des enroulements de ce type de moteur monophasé de la Fig. VI.12, les équations des flux de ce moteur s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi_{ps} = L_{ps}.i_{ps} + M_{pr}.i_{r1}.\cos\theta - M_{pr}.i_{r2}.\sin\theta \\ \psi_{as} = L_{as}.i_{as} + M_{ar}.i_{r1}.\sin\theta + M_{ar}.i_{r2}.\cos\theta \\ \psi_{r1} = L_{r1}.i_{r1} + M_{pr}.i_{ps}.\cos\theta + M_{ar}.i_{as}.\sin\theta \\ \psi_{r2} = L_{r2}.i_{r2} - M_{pr}.i_{ps}.\sin\theta + M_{ar}.i_{as}.\cos\theta \end{cases} \quad \text{(IV.30)}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\psi_{ps}\\ \psi_{as}\\ \psi_{r1}\\ \psi_{r2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{ps} & 0 & M_{pr}.\cos\theta & -M_{pr}.\sin\theta\\ 0 & L_{as} & M_{ar}.\sin\theta & M_{ar}.\cos\theta\\ M_{pr}.\cos\theta & M_{ar}.\sin\theta & L_{r1} & 0\\ -M_{pr}.\sin\theta & M_{ar}.\cos\theta & 0 & L_{r2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}i_{ps}\\ i_{as}\\ i_{r1}\\ i_{r2}\end{bmatrix} \quad \text{(IV.31)}$$

θ *:* angle entre le stator et le rotor ;

ψ_{ps} , ψ_{as} *:* Les flux totaux traversant l'enroulement principal et auxiliaire.

ψ_{r1}, ψ_{r2} *:* Les flux totaux traversant les enroulements fictifs rotoriques.

M_{pr} *:* L'amplitude de la mutuelle induction entre l'enroulement principal et un enroulement fictif du rotor.

M_{ar} *:* L'amplitude de la mutuelle induction entre l'enroulement auxiliaire et un enroulement fictif du rotor.

- **Expression du couple électromagnétique :**

$$C_{em}=\frac{P}{2}[I]^t\left\{\frac{d}{d\theta}[L]\right\}[I] \quad \text{(IV.32)}$$

Avec :

$$[I]^T=\begin{bmatrix}i_{ps} & i_{as} & i_{r1} & i_{r2}\end{bmatrix};\ [L]=\begin{bmatrix}[L_s] & [M_{sr}]\\ [M_{sr}]^t & [L_r]\end{bmatrix};\ [M_{sr}]=\begin{bmatrix}M_{pr}.\cos\theta & -M_{pr}.\sin\theta\\ M_{ar}.\sin\theta & M_{ar}.\cos\theta\end{bmatrix};$$

$$[M_{sr}]^T=\begin{bmatrix}M_{pr}.\cos\theta & M_{ar}.\sin\theta\\ -M_{pr}.\sin\theta & M_{ar}.\cos\theta\end{bmatrix};\ [L_s]=\begin{bmatrix}L_{ps} & 0\\ 0 & L_{as}\end{bmatrix};\ [L_r]=\begin{bmatrix}L_{r1} & 0\\ 0 & L_{r2}\end{bmatrix}.$$

Donc après calcul direct, l'expression du couple électromagnétique devient :

$$C_{em}=P.[-M_{pr}(i_{r1}.\sin\theta+i_{r2}\cos\theta)i_{ps}+M_{ar}.(i_{r1}.\cos\theta+i_{r2}.\sin\theta)i_{as}] \quad \text{(IV.33)}$$

- **Equation mécanique :**

La loi fondamentale de la dynamique appliquée sur l'arbre du rotor du moteur et de toute charge attachée donne :

$$J\frac{d\Omega_m}{\partial t}=C_{em}-f_v\Omega_m-C_r \quad \text{(IV.34)}$$

En remplaçant C_{em} dans (IV.34) par son expression donnée par (IV.33) on obtient :

$$\frac{d\Omega_m}{dt}=\frac{P}{J}[-M_{pr}(i_{r1}.\sin\theta+i_{r2}\cos\theta)i_{ps}+M_{ar}(i_{r1}\cos\theta+i_{r2}\sin\theta)i_{as}]-f_v\frac{\Omega_m}{J}-\frac{C_r}{J}\Omega_r \quad \text{(IV.35)}$$

J : Le moment d'inertie du rotor et de toute charge attachée à lui ;

f_v : Le coefficient de frottements visqueux du moteur ;

C_r : Le couple résistant de la charge.

IV.3.2 Modèle de Park du moteur monophasé à condensateur permanent

Les coefficients des équations différentielles ainsi obtenues sont variables et la résolution analytique du système se heurte à des difficultés pratiquement insurmontables. Pour obtenir un système d'équations à coefficients constants on transforme les enroulements statorique et rotorique en enroulements orthogonaux selon la transformation de Park (Fig. IV.13).

La matrice de Park dans le cas du moteur asynchrone monophasé est définie par :

$$[P(\theta_a)] = \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \sin\theta_a \\ -\sin\theta_a & \cos\theta_a \end{bmatrix} \tag{IV.36}$$

Pour la transformation de l'enroulement du stator, on a :

$$\begin{aligned} &\theta_a = \theta_s \\ &[V_{sdq}] = [P(\theta_s)].[V_{pas}] \\ &[P(\theta_s] = \begin{bmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{IV.37}$$

Pour la transformation de l'enroulement du rotor, on a :

$$\begin{aligned} &\theta_a = \theta_r \\ &[V_{rdq}] = [P(\theta_r)].[V_{r12}] \\ &[P(\theta_r)] = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{IV.38}$$

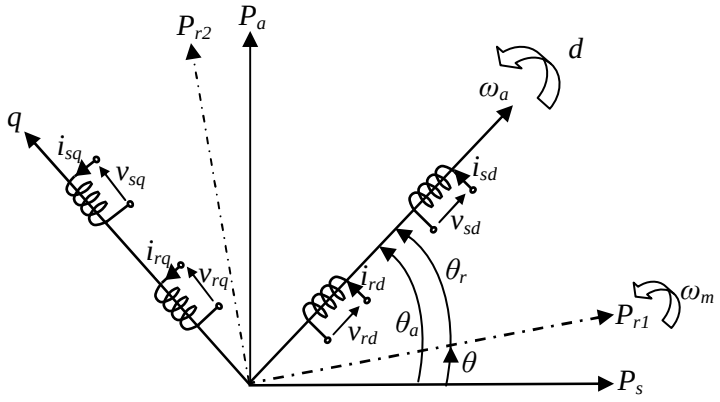


Fig. IV.13 Représentation de la transformation de Park du moteur monophasé à condensateur permanent.

Dans notre cas, le référentiel doit être fixé dans la partie ou se trouve la dissymétrie, le référentiel sera lié au stator, $\theta_a=0$, c'est à dire que le système *(d, q)* sera confondu avec l'axe (P_s, P_a)

Il en résulte que : $\theta = -\theta_r$; $\frac{d\theta_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} = -\omega_r = \omega_m$

Donc :

$$[P(0)] = [P_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(IV.39)}$$

$$[P(-\theta_r)] = [P_r] = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \quad \text{(IV.40)}$$

- **Équations des tensions :**

En multipliant l'expression (IV.28) par [P_s] donnée par l'équation (IV.39), on obtient :

$$[P_s][v_{pas}] = [R_{pas}].[P_s][i_{pas}] + [P_s]\frac{d}{dt}[\psi_{pas}] + [P_s][v_c]$$

$$[v_{sdq}] = [R_{pas}].[i_{sdq}] + [P_s]\frac{d}{dt}\{[P_s]^{-1}[\psi_{sdq}]\} + [v_{cdq}]$$

D'ou :

$$[v_{sdq}] = [R_{pas}].[i_{sdq}] + \frac{d}{dt}[\psi_{sdq}] + [v_{cdq}] \quad \text{(IV.40)}$$

Avec :

$$[v_{sdq}] = [v_{sd} \quad v_{sq}]^T \; ; \; [i_{sdq}] = [i_{sd} \quad i_{sq}]^T \; ; \; [\psi_{sdq}] = [\psi_{sd} \quad \psi_{sq}]^T \; ; \; [v_c] = [v_{cd} \quad v_{cq}]^T = [0 \quad v_{cq}]^T$$

Pour l'équation du rotor, en multipliant l'expression (IV.29) par [P_r] donnée par l'équation (IV.40), on obtient :

$$[v_{rdq}] = [R_{r12}][P_r][i_{r12}] + [P_r]\frac{d}{dt}[\psi_{r12}]$$

$$[v_{rdq}] = [R_{r12}].[i_{rdq}] + [P_r]\frac{\partial}{\partial t}\{[P_r]^{-1}[\psi_{rdq}]\}$$

$$[v_{rdq}] = [R_{r12}].[i_{rdq}] + \frac{d}{dt}[\psi_{rdq}] + [P_r]\left\{\frac{d}{dt}[P_r]^{-1}\right\}[\psi_{rdq}]$$

On démontre que :

$$[P_r]\left\{\frac{d}{dt}[P_r]^{-1}\right\}=\frac{d\theta_r}{dt}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-\frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.41)}$$

Ce qui donne :

$$[v_{rdq}]=[R_{r12}][i_{rdq}]+\frac{d}{dt}[\psi_{rdq}]-\omega_m\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}[\psi_{rdq}] \qquad \text{(IV.42)}$$

Avec :

$$[v_{rdq}]=[v_{rd}\quad v_{rq}]^T\ ;\ [i_{rdq}]=[i_{rd}\quad i_{rq}]^T\ ;\ [\psi_{rdq}]=[\psi_{rd}\quad \psi_{rq}]^T$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}v_{sd}\\ v_{sq}\\ v_{rd}\\ v_{rq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{ps} & 0 & 0 & 0\\ 0 & R_{as} & 0 & 0\\ 0 & \omega_m M_{ar} & R_{r1} & \omega_m L_{r2}\\ -\omega_m M_{pr} & 0 & -\omega_m L_{r1} & R_{r2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\\ i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}L_{ps} & 0 & M_{pr} & 0\\ 0 & L_{as} & 0 & M_{ar}\\ M_{pr} & 0 & L_{r1} & 0\\ 0 & M_{ar} & 0 & L_{r2}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\\ i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ v_c\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.43)}$$

- **Équations des flux:**

La relation matricielle qui lie les flux et les courants dans un référentiel lié au stator est :

$$\begin{bmatrix}\psi_{sd}\\ \psi_{sq}\\ \psi_{rd}\\ \psi_{rq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{ps} & 0 & M_{pr} & 0\\ 0 & L_{as} & 0 & M_{ar}\\ M_{pr} & 0 & L_{r1} & 0\\ 0 & M_{ar} & 0 & L_{r2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\\ i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.42)}$$

Après transformation du système (IV.43.), l'enroulement rotorique étant en court-circuit, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases}v_{sd}=R_{ps}i_{sd}+\dfrac{d}{dt}\psi_{sd}\\ v_{sq}=R_{as}i_{sq}+\dfrac{d}{dt}\psi_{sq}+v_c\\ 0=R_{r1}i_{rd}+\dfrac{d}{dt}\psi_{rd}+\omega_m\psi_{rq}\\ 0=R_{r2}i_{rq}+\dfrac{d}{dt}\psi_{rq}-\omega_m\psi_{rd}\end{cases} \qquad \text{(II.43)}$$

En éliminant i_{rd}, i_{rq} et ψ_{sd}, ψ_{sq} de la relation (IV.43) et ceci en se basant sur la relation (IV.42) et aussi $L_{r1}=L_{r2}=L_r$ et $R_{r1}=R_{r2}=R_r$, ce qui est d'ailleurs le cas dans un moteur à cage d'écureuil, on obtient :

$$\begin{cases} v_{sd} = R_{ps} i_{sd} + \dfrac{M_{pr}}{L_r}\dfrac{d}{dt}\psi_{rd} + \left(L_{ps} - \dfrac{M_{pr}^{2}}{L_r}\right)\dfrac{di_{sd}}{dt} \\ v_{sq} = R_{as} i_{sq} + \dfrac{M_{ar}}{L_r}\dfrac{d}{dt}\psi_{rq} + \left(L_{as} - \dfrac{M_{ar}^{2}}{L_r}\right)\dfrac{di_{sq}}{dt} + v_c \\ 0 = \dfrac{R_r}{L_r}\psi_{rd} - \dfrac{R_r}{L_r} M_{pr} i_{sd} + \dfrac{d}{dt}\psi_{dr} + \omega_m \psi_{rq} \\ 0 = \dfrac{R_r}{L_r}\psi_{rq} - \dfrac{R_r}{L_r} M_{ar} i_{sq} + \dfrac{d}{dt}\psi_{qr} - \omega_m \psi_{rd} \\ 0 = i_{sq} - C\dfrac{d}{dt}v_c \end{cases} \quad \text{(IV.44)}$$

- **Expression du couple électromagnétique**

En tenant compte de l'expression (IV.33) avec l'utilisation de l'expression (IV.42) on déduit l'expression finale du couple électromagnétique.

$$C_{em} = \frac{P}{L_r}\left(M_{ra}\psi_{rd} i_{sq} - M_{rp}\psi_{rq} i_{sd}\right) \quad \text{(IV.45)}$$

- **Équation mécanique de la machine**

En remplaçant le couple électromagnétique de la relation (IV.45) dans l'équation (IV.34) on trouve :

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{P}{JL_r}\left(M_{ar}\psi_{rd} i_{sq} - M_{pr}\psi_{rq} i_{sd}\right) - \frac{f}{J}\Omega_r - \frac{C_r}{J} \quad \text{(IV.46)}$$

En ajoutant l'équation (IV.46) à l'équation (IV.44) et en arrangeant les équations sous forme d'un espace d'état, le modèle du moteur asynchrone monophasé à condensateur permanent alimenté en tension dans un référentiel lié au stator est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_{rd}}{dt} = -\dfrac{R_r}{L_r}\psi_{dr} - P\omega_m\psi_{qr} + \dfrac{R_r}{L_r}M_{pr} i_{sd} \\ \dfrac{d\psi_{rq}}{dt} = -\dfrac{R_r}{L_r}\psi_{qr} + P\omega_m\psi_{dr} + \dfrac{R_r}{L_r}M_{ar} i_{sq} \\ \dfrac{di_{sd}}{dt} = \dfrac{R_r M_{pr}}{L_r^2 L_{ps}\sigma_{dr}}\psi_{dr} + \dfrac{Pw_m M_{pr}}{L_r L_{ps}\sigma_{dr}}\psi_{rq} - \dfrac{L_r^2 R_{ps} + M_{pr}^{2} R_r}{L_r^2 L_{ps}\sigma_{dr}} i_{ds} + \dfrac{v_{sd}}{L_{ps}\sigma_{dr}} \\ \dfrac{di_{sq}}{dt} = \dfrac{P\omega_m M_{ar}}{L_r L_{as}\sigma_{qr}}\psi_{dr} + \dfrac{R_r M_{ar}}{L_r^2 L_{as}\sigma_{qr}}\psi_{rq} - \dfrac{L_r^2 R_{as} + M_{ar}^{2} R_r}{L_r^2 L_{as}\sigma_{qr}} i_{qs} + \dfrac{v_{qs}}{L_{as}\sigma_{qr}} \\ \dfrac{d\omega_m}{\partial t} = \dfrac{P}{JL_r}\left(M_{ar}\psi_{dr} i_{sq} - M_{pr}\psi_{rq} i_{sd}\right) - \dfrac{f}{J}\omega_m - \dfrac{C_r}{J} \\ \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{i_{qs}}{C} \end{cases} \quad \text{(IV.47)}$$

Avec $\sigma_{rd} = 1 - \frac{M_{pr}^2}{L_{ps} L_r}$; $\sigma_{rq} = 1 - \frac{M_{ar}^2}{L_{as} L_r}$

Et le vecteur d'état dans ce cas est : $\begin{bmatrix} \psi_{rd} & \psi_{rq} & i_{sd} & i_{sq} & \omega_m & v_c \end{bmatrix}^T$

Pour un vecteur d'état : $\begin{bmatrix} i_{sd} & i_{sq} & i_{rd} & i_{rq} & \omega_m & v_c \end{bmatrix}^T$

On trouve le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_{ps}}{\sigma_{dr} L_{ps}} i_{sd} + \frac{P\omega_m M_{ar} M_{pr}}{L_r L_{ps} \sigma_{rd}} i_{sq} + \frac{M_{pr} R_r}{L_r L_{ps} \sigma_{rd}} i_{rd} + \frac{P M_{pr} \omega_m}{L_r L_{ps} \sigma_{rd}} i_{rq} + \frac{v_{sd}}{L_{ps} \sigma_{rd}} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{P\omega_m M_{ar} M_{pr}}{L_r L_{as} \sigma_{rq}} i_{sd} - \frac{R_{as}}{\sigma_{rq} L_{as}} i_{sq} + \frac{P M_{ar} \omega_m}{L_r L_{as} \sigma_{rq}} i_{rd} + \frac{M_{ar} R_r}{L_r L_{as} \sigma_{rq}} i_{rq} + \frac{v_{sq}}{\sigma_{qr} L_{as}} - \frac{v_c}{\sigma_{qr} L_{sa}} \\ \frac{di_{rd}}{dt} = \frac{M_{pr} R_{ps}}{\sigma_{rd} L_{ps} L_r} i_{sd} - \frac{R_r}{\sigma_{rd} L_r} i_{rd} - \frac{P M_{ar} \omega_m}{\sigma_{rd} L_r} i_{sq} - \frac{P\omega_m}{\sigma_{rd}} i_{rq} - \frac{M_{pr}}{\sigma_{dr} L_{ps} L_r} v_{sd} \\ \frac{di_{rq}}{dt} = \frac{P M_{pr} \omega_m}{\sigma_{rq} L_r} i_{sd} + \frac{P\omega_m}{\sigma_{rq}} i_{rd} + \frac{M_{ar} R_{as}}{\sigma_{rq} L_{as} L_r} i_{sq} - \frac{R_r}{\sigma_{rq} L_r} i_{rq} - \frac{M_{ar}}{\sigma_{rq} L_{as} L_r} v_c + \frac{M_{ar}}{\sigma_{rq} L_{as} L_r} v_{sq} \\ \frac{d\omega_m}{dt} = \frac{P}{J}\left(M_{ar} i_{rd} i_{sq} - M_{pr} i_{rq} i_{sd}\right) - \frac{f}{J}\omega_m - \frac{C_r}{J} \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_{sq} \end{cases} \quad \text{(IV.48)}$$

Et

$$C_{em} = P\left(M_{ar} i_{rd} i_{sq} - M_{pr} i_{rq} i_{sd}\right) \quad \text{(IV.49)}$$

IV.4. Exercices

- ✓ **Exercice 1**

Selon Park, une machine asynchrone dont les enroulements sont couplés en étoile peut être représentée par deux armatures diphasées fictives. Ces armatures sont placées dans un repère *dq* lié au champ tournant comme le montre la *Fig. II.14* :

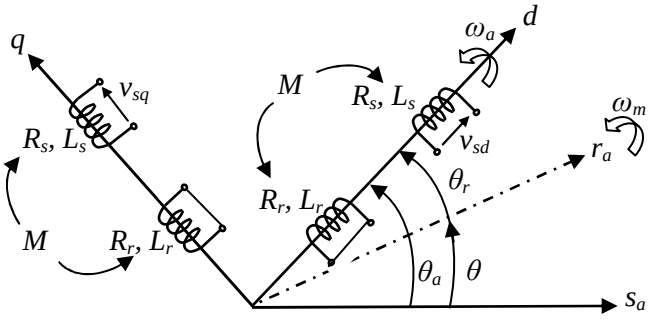


Fig. II.14 : Machine diphasée fictive

Avec ω_a représente la vitesse électrique du repère tournant *dq* et ω_m est celle du rotor.

1) Etablir les équations des composantes *dq* des tensions statorique et rotorique si en fixe le repère *dq* par rapport au stator ;
2) Etablir les équations des composantes *dq* des tensions statorique et rotorique si en fixe le repère *dq* par rapport au champ tournant
3) Etablir les équations des composantes *dq* des tensions statorique et rotorique si en fixe le repère *dq* par rapport au rotor
4) Indiquer l'intérêt de chaque choix précédents (Questions 1,2 et 3).

✓ **Exercice 2**

La modélisation en régime dynamique de la machine asynchrone dans le repère de Park permet d'établir :

Pour le stator : $\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \dfrac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_s \psi_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \dfrac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_s \psi_{ds} \end{cases}$ et $\begin{cases} \psi_{sd} = L_s i_{sd} + M i_{rd} \\ \psi_{sv} = L_s i_{sq} + M i_{rq} \end{cases}$

Pour le rotor : $\begin{cases} v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_m)\psi_{rq} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_m)\psi_{rd} \end{cases}$ et $\begin{cases} \psi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd} \\ \psi_{sv} = L_r i_{rq} + M i_{sq} \end{cases}$

1- Si on fixe le repère *dq* par rapport au stator, que devienne sa vitesse de rotation ;
2- Représenter cette machine dans le repère de Concordia (*αβ)*;
3- Etablir le modèle de Concordia (en *αβ)* correspondant ;
4- Si on considère les vecteurs suivants :
[*X*]=[$\psi_{s\alpha}$, $\psi_{s\beta}$, $i_{r\alpha}$, $i_{r\beta}$] et [*U*]=[$v_{s\alpha}$, $v_{s\beta}$].

Mettre le modèle ainsi obtenu sous la forme . $[\dot{X}] = [A][X] + [B][U]$

Avec [*A*] et [*B*] sont deux matrices à déterminées.

✓ **Exercice 3**

La modélisation en régime dynamique de la machine asynchrone triphasée permet d'établir :

Pour le stator : $\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \dfrac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_s \psi_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \dfrac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_s \psi_{sd} \end{cases}$ et $\begin{cases} i_{sd} = \dfrac{1}{\sigma L_s}\psi_{sd} - \dfrac{k^2}{\sigma M}\psi_{rd} \\ i_{sq} = \dfrac{1}{\sigma L_s}\psi_{sq} - \dfrac{k^2}{\sigma M}\psi_{rq} \end{cases}$

Pour le rotor : $\begin{cases} v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \dfrac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_m)\psi_{rq} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \dfrac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_m)\psi_{rd} \end{cases}$ et $\begin{cases} i_{rd} = \dfrac{1}{\sigma L_r}\psi_{rd} - \dfrac{k^2}{\sigma M}\psi_{sd} \\ i_{rq} = \dfrac{1}{\sigma L_r}\psi_{rq} - \dfrac{k^2}{\sigma M}\psi_{sq} \end{cases}$

avec : $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_s L_r}}$ et $\sigma = 1 - k^2$

Si on considère les vecteurs d'état suivants :

Le vecteur d'état : $[X] = \begin{bmatrix} \psi_{sd} & \psi_{sq} & \psi_{rd} & \psi_{rq} \end{bmatrix}^T$

Le vecteur d'entrée : $[U] = \begin{bmatrix} v_{sd} & v_{sq} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Le vecteur de sortie : $[Y] = [X]$

Mettre le modèle de la machine sous forme d'équation d'état comme suit:

$$\begin{cases} [\dot{X}] = [A][X] + [B][U] \\ [Y] = [X] \end{cases}$$

Avec [*A*] et [*B*] sont deux matrices à déterminées.

CHAPITRE V :
MODELISATION DES MACHINES SYNCHRONES

Les machines synchrones constituent la deuxième catégorie importante de machines à courant alternatif. Elles sont réversibles et peuvent fonctionner en générateur (Alternateur) ou en moteur (Moteurs synchrones ou compensateurs synchrones). Comme toute machine tournante, une machine synchrone comporte deux parties essentielles, le stator et le rotor. Le rotor sera en général un électro-aimant alimenté en continu (appelé "circuit d'excitation" ou "inducteur"). Les bobinages polyphasés du stator (en général triphasé) forment l'induit de la machine. Le stator d'une machine synchrone est identique dans sa conception à celui d'une machine asynchrone.

Le rotor, muni d'un enroulement monophasé excité en courant continu, se présente sous deux formes distinctes définissant deux familles de machines synchrones, à savoir:

- *Machines à rotor cylindrique (ou à pôles lisses):* Le rotor a sa périphérie lisse à l'exception des encoches. La réluctance du circuit magnétique, entre rotor et stator est pratiquement constante et indépendante de la position du rotor. Ce mode d'exécution d'enroulement concerne les machines rapides à 2 ou 4 pôles comme les turboalternateurs, les hydro alternateurs ou les turbomoteurs. Du fait des contraintes mécaniques très élevées provoquées par la vitesse de rotation correspondant à ces faibles polarités, le rotor doit être réalisé sous forme de cylindre en acier forgé à haute résistance mécanique.

- *Machines à pôles saillants:* Le nombre de pôle minimal et toujours fixé à 4 et la vitesse périphérie du rotor est ainsi réduite. Le bobinage est réalisé de telle sorte que chacun des pôles successifs sur la périphérie soit alternativement nord et sud. Toutes les bobines d'excitation sont parcourues par le même courant continu, en série. Dans ce cas, le flux est canalisé de façon localisée sous les pôles. Ce type de machines synchrones, sauf celles de petites puissances, sont munies de circuits amortisseurs généralement lorsque les pôles sont feuilletés. Il s'agit de barres de cuivre logées dans des encoches des épanouissements polaires brasées à des arcs de court- circuit formant ainsi une fraction de cage semblable à celle des cages des moteurs asynchrones. L'effet amortisseur se traduit par la création de courant pendant les régimes transitoires. Ces derniers créent un flux qui s'oppose à la variation du flux statorique, ils permettent ainsi d'amortir les variations brusques imposées à la machine (changement de vitesse, perturbations du couple de charge…). Ces amortisseurs sont utilisés

également pour le démarrage asynchrone des machines synchrones et aussi pour le maintien de la vitesse de rotation au synchronisme.

V.1 Modélisation des moteurs synchrones sans amortisseurs

L'enroulement statorique du moteur synchrone triphasée comporte 3 phases identiques décalées entre elles de 2π/3 radians. Le rotor comporte un enroulement d'excitation excité par un courant continu (Fig. V.1).

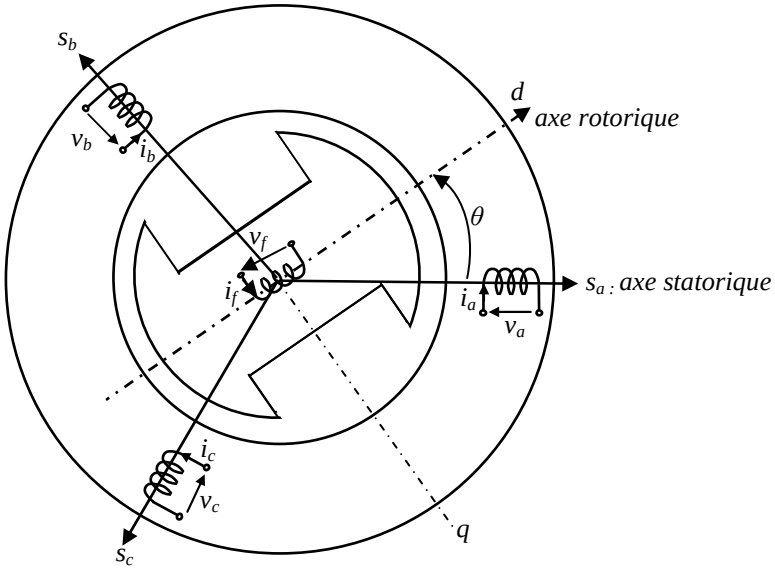


Fig. V.1 : Représentation des enroulements de la machine synchrone triphasée sans amortisseurs

V.1.1 Modèle réel des moteurs synchrones triphasés sans amortisseurs

La modélisation du moteur synchrone triphasée est basée sur un nombre d'hypothèses simplifiant l'obtention d'un modèle mathématique simple à résoudre, pour cela nous considérons que :

- L'effet de la saturation du circuit magnétique est négligé ;
- La répartition de l'induction le long de l'entrefer est supposée sinusoïdale ;
- Les pertes fer sont négligées (hystérésis et courant de Foucault) ;
- Les effets des encoches ne sont pas pris en compte ;
- L'effet de la température sur les résistances est négligé ;
- Le couplage capacitif entre les enroulements est négligé ;
- L'effet de peau, qui augmente les résistances et diminue les inductances, est négligé.

- **Equations des tensions**

Les équations de tensions de la machine synchrone triphasée exprimées dans le repère (*a,b,c*) s'écrivent :

$$\begin{cases} [V_s] = [R_s][I_s] + \dfrac{d[\Psi_s]}{dt} \\ [V_r] = [R_r][I_r] + \dfrac{d[\Psi_r]}{dt} \end{cases} \quad (V.1)$$

Où :

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} ; [V_s] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} ; [I_s] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} ; [\Psi_s] = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix}$$

$$[R_r] = R_f ; [V_r] = v_f ; [I_r] = i_f ; [\Psi_f] = \psi_f$$

- **Equations des flux**

L'équation du flux est donnée par:

$$\begin{cases} [\Psi_s] = [L_s][I_s] + [M_{sr}][I_r] \\ [\Psi_r] = [L_r][I_r] + [M_{rs}][I_s] \end{cases} \quad (V.2)$$

Où :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix} ; [L_r] = L_f ; [M_{sr}] = \begin{bmatrix} M_{af} \\ M_{bf} \\ M_{cf} \end{bmatrix} ; [M_{rs}] = \begin{bmatrix} M_{fa} & M_{fb} & M_{fc} \end{bmatrix}$$

Avec :

L_a, L_b, L_c : Les inductances propres des trois phases statoriques *a*, *b*, *c*;

L_f : L'inductance propre de l'enroulement du rotor *f*.

M_{ab}, M_{ba}, M_{ac}, M_{ca}, M_{bc}, M_{cb} : Les inductances mutuelles entre phases statoriques ;

M_{af}, M_{fa}, M_{bf}, M_{fb}, M_{fc}, M_{cf} : Les inductances mutuelles entre phases statoriques et l'enroulement du rotor.

L'inductance propre du rotor L_f est constante, elle est indépendante de la position du rotor. Les inductions mutuelles entre les enroulements statorique et rotorique sont fonction de

l'angle électrique θ entre l'axe de la phase *a* du stator pris comme référence et l'axe *d* (fig. V.1) :

$$\begin{cases} M_{af}(\theta) = M_{fa}(\theta) = M_{fs}\cos\theta \\ M_{bf}(\theta) = M_{fb}(\theta) = M_{fs}\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{cf}(\theta) = M_{fc}(\theta) = M_{fs}\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (V.3)$$

Avec M_{fs} est l'inductance mutuelle maximale stator-rotor (lorsque $\theta=0$)

Selon les équations I.91 à I.93 (Chapitre I : § I.3). Les inductances propres statoriques sont données comme suit:

$$\begin{cases} L_a(\theta) = L_{so} + L_{sv}\cos 2\theta \\ L_b(\theta) = L_{so} + L_{sv}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ L_c(\theta) = L_{so} + L_{sv}\cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (V.4)$$

Avec :

$$L_{so} = L_{s\sigma} + \frac{L_{sd} + L_{sq}}{2} \ , \ L_{sv} = \frac{L_{sd} - L_{sq}}{2}$$

Où :

$L_{s\sigma}$: L'inductance de fuite au stator ;

L_{sd} : L'inductance longitudinale au stator (L'inductance sur l'axe *d* ou directe) ;

L_{sq} : L'inductance transversale au stator (L'inductance sur l'axe *q* ou en quadrature).

Pour les machines à pôles saillants, les mutuelles statoriques dépendent de θ :

$$\begin{cases} M_{ab}(\theta) = M_{ba}(\theta) = M_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{bc}(\theta) = M_{cb}(\theta) = M_{s0} + L_{sv}\cos 2\theta \\ M_{ca}(\theta) = M_{ac}(\theta) = M_{s0} + L_{sv}\cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (V.5)$$

Avec : $M_{s0} = -\frac{L_{sd} + L_{sq}}{4}$

Remarque : Dans une machine à rotor cylindrique (à pôles lisses), ces inductances mutuelles sont égales et constantes :

$$M_{ab} = M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{bc} = M_{cb} = Cte \qquad (V.6)$$

Le système ainsi obtenu est non linéaire car les inductances sont en fonction de la position du rotor, sa résolution est assez lourde. Le problème est simplifié en adoptant la transformation de Park.

- **Expression du couple électromagnétique**

L'expression du couple électromagnétique est obtenue par dérivation de la Co-énergie, (Chapitre I : § I.2.1):

$$C_{em} = \frac{\partial W_{co}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix} \qquad (IV.7)$$

V.1.2 Modèle de Park du moteur synchrone triphasée sans amortisseurs :

La méthode consiste à transformer le système d'enroulement triphasé statorique d'axe (*a,b,c*) en un système équivalent (*d, q*) en quadrature (Fig. V.2). Dans un référentiel lié au rotor on a $\omega_a = \omega_m$. Un développement identique à celui du paragraphe § II.2.1 (Chapitre II) conduit à un système d'équation analogue à celui obtenu comme suit.

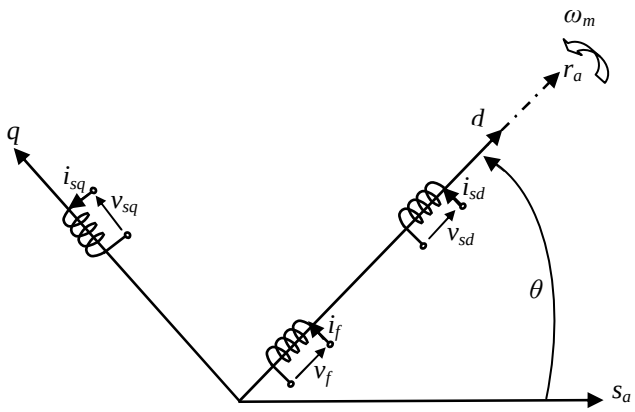


Fig. V.2 : Représentation de la MS sans amortisseurs dans le repère de Park.

- **Equations des tensions**

En se basant sur la théorie généralisée des machines électriques (§II.3), les équations des tensions pour un référentiel lié au rotor s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \dfrac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_m \psi_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \dfrac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_m \psi_{sd} \\ v_f = R_f i_f + \dfrac{d\psi_f}{dt} \end{cases} \quad (V.8)$$

Ces tensions statoriques, sous forme matricielle, exprimées dans le référentiel (*d, q*) :

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_f \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

- **Equations des flux**

En appliquant la transformation de Park à l'équation du flux statoriques donnée par (V.2), il vient :

$$\begin{cases} [\psi_{sdq}] = [P][\Psi_s] = [P]\{[L_s][I_s] + [M_{sr}][I_r]\} \\ [\psi_{rdq}] = [P][\Psi_r] = [P]\{[L_r][I_r] + [M_{rs}][I_s]\} \end{cases} \quad (V.10)$$

En introduisant la matrice de Park et les expressions des différentes inductances développées au § V.1.1, on obtient:

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_d i_{sd} + M_f i_f \\ \psi_{sq} = L_q i_{sq} \\ \psi_f = L_f i_f + M_f i_{sd} \end{cases} \quad (V.11)$$

Avec :

$L_d = L_{so} - M_{s0} + \dfrac{3}{2} L_{sv}$: L'inductance synchrone longitudinale ;

$L_q = L_{so} - M_{s0} - \dfrac{3}{2} L_{sv}$: L'inductance synchrone transversale ;

$M_f = \sqrt{\dfrac{3}{2}} M_{fs}$: L'inductance mutuelle cyclique stator-rotor.

Les inductances L_{so}, L_{sv} et M_{fs} sont définit au paragraphe (§ V.1.2).

Ces flux, sous forme matricielle, exprimées dans le référentiel (*d, q*) :

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_f \\ 0 & L_q & 0 \\ M_f & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_f \end{bmatrix} \quad (V.12)$$

Le passage des grandeurs *d*, *q* aux grandeurs de phase statoriques est donné par la transformation inverse.

- **Expression du couple électromagnétique**

Comme la sous matrice $[L_r]$ ne contient que le terme constant L_f . Il est possible de simplifier l'expression générale du couple électromagnétique donnée par l'équation (V.7) et on aboutit à :

$$C_{em} = \frac{1}{2}[I_s]^t \left\{ \frac{d}{d\theta}[L_s] \right\} [I_s] + [I_s]^t \left\{ \frac{d}{d\theta}[M_{sr}] \right\} [I_r]$$

En effectuant le changement de varaible $[i_{abc}]=[P]^{-1}[i_{sdq}]$, on obtient finalement :

$$C_{em} = p(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}) \tag{V.13}$$

Avec les expressions des flux ψ_{sd} et ψ_{sq} données par l'équation (V.11), le couple s'exprime alors par :

$$C_{em} = p[M_f . i_f . i_{sq} + (L_d - L_q) . i_{sd} . i_{sq}] \tag{V.14}$$

- **Equation mécanique**

L'équation mécanique devienne après substitution de l'expression du couple électromagnétique donnée par l'équation (V.14) dans l'équation générale d'une machine tournant exprimée par l'équation du mouvement (II.25) développée au chapitre II, §II.5.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J}[M_f . i_f . i_{sq} + (L_d - L_q) . i_{sd} . i_{sq}] - \frac{C_r}{J} - \frac{K_f}{J} \Omega_m \tag{V.15}$$

V.2 Modélisation des moteurs synchrones avec amortisseurs:

Les machines à pôles saillants ont leur rotor muni d'amortisseurs constitués de barres de cuivre logées dans des encoches pratiquées dans les pièces polaires. Ces barres sont reliées entre elles à leurs extrémités par deux anneaux ou des arceaux conducteurs suivant le nombre de pôles. Les amortisseurs s'opposent à toute variation rapide du flux à travers le rotor. Ils ont un rôle primordial dans la stabilisation de la vitesse de la machine suite à des variations de charges. Ils possèdent la même caractéristique mécanique que celle des machines asynchrone à cage. Si la vitesse tend à augmenter (glissement négatif) suite à une baisse soudaine de la charge, l'effet d'induction prend naissance dans les enroulements amortisseurs et produit un couple résistant (négatif) au mouvement du rotor et le ralentit, et le rotor est ainsi ramené à la vitesse synchrone. Dans le cas contraire, si la vitesse tend à chuter (glissent positif) suite à une surcharge brusque de la machine, l'effet d'induction prend naissance et l'enroulement

amortisseurs produit un couple (positif) additionnel qui s'ajoute au couple moteur pour ramener le rotor à la vitesse synchrone. Dans les machines à pole lisse, c'est la partie massive du fer rotorique qui joue le rôle d'amortisseurs.

V.2.1 Modèle réel des moteurs synchrones triphasés avec amortisseurs:

La figure (V.3) rappelle la position des axes des phases statoriques et rotoriques dans l'espacé électrique *abc*. L'enroulement statorique comporte 3 phases identiques décalées entre elles dans l'espace d'un angle électrique de 120°. En plus de l'enroulement d'excitation, le rotor est équipé au voisinage de l'entrefer de deux enroulements amortisseurs en quadratures et court-circuités.

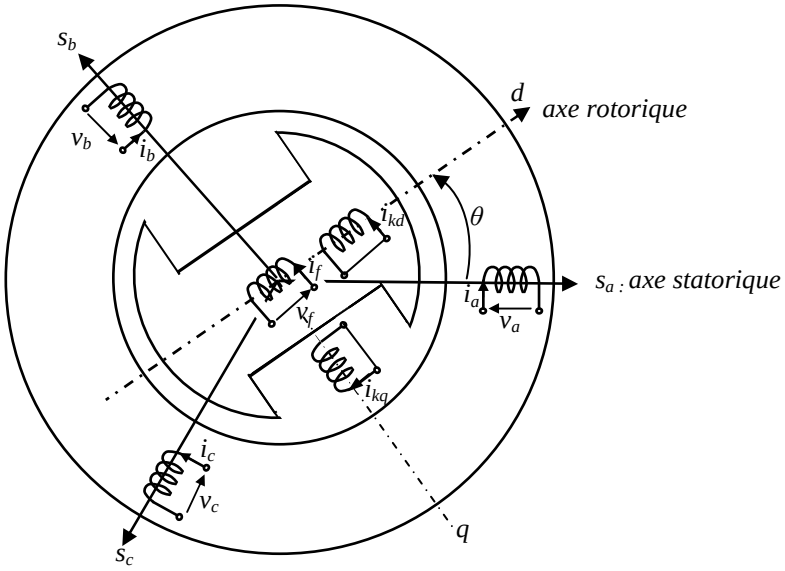


Fig. V.3 : Représentation schématique d'un moteur synchrone triphasé avec amortisseurs.

- **Equations des tensions**

Le système d'équations de tension de la machine synchrone est obtenu par l'application de la loi d'Ohm généralisée:

$$\begin{cases} [V_s] = [R_s][I_s] + \dfrac{d[\Psi_s]}{dt} \\ [V_r] = [R_r][I_r] + \dfrac{d[\Psi_r]}{dt} \end{cases} \qquad \text{(V.16)}$$

Où :

$$[R_s]=\begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix};\ [R_f]=\begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & R_{kq} \end{bmatrix};\ [V_s]=\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix};\ [V_r]=\begin{bmatrix} v_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ [I_s]=\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix};$$

$$[I_r]=\begin{bmatrix} i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix};\ [\Psi_s]=\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix};\ [\Psi_r]=\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix}$$

- **Equations des flux**

$$\begin{cases} [\Psi_s]=[L_s][I_s]+[M_{sr}][I_r] \\ [\Psi_r]=[L_r][I_r]+[M_{rs}][I_s] \end{cases} \qquad (V.17)$$

Où :

$$[L_s]=\begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix};\ [L_r]=\begin{bmatrix} L_f & M_{f,kd} & M_{f,kq} \\ M_{kd,f} & L_{kd} & M_{kd,kq} \\ M_{kq,f} & M_{kq,kd} & L_{kq} \end{bmatrix};[M_{sr}]=[M_{rs}]^T=\begin{bmatrix} M_{af} & M_{a,kd} & M_{a,kq} \\ M_{bf} & L_{b,kd} & M_{b,kq} \\ M_{cf} & M_{c,kd} & L_{c,kq} \end{bmatrix};$$

D'autre part, les expressions des différentes inductances en fonction de θ donnent :

$$[L_s]=\begin{bmatrix} L_{s0}+L_{sv}\cos 2\theta & M_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta-\frac{2\pi}{3}) \\ M_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta+\frac{2\pi}{3}) & L_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta-\frac{2\pi}{3}) & M_{s0}+L_{sv}\cos 2\theta \\ M_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta-\frac{2\pi}{3}) & M_{s0}+L_{sv}\cos 2\theta & L_{s0}+L_{sv}\cos 2(\theta+\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix};$$

$$[L_r]=\begin{bmatrix} L_f & M_{f,kd} & 0 \\ M_{kd,f} & L_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & L_{kq} \end{bmatrix};[M_{sr}]=[M_{rs}]^T=\begin{bmatrix} M_{fs}\cos\theta & M_{kd,s}\cos\theta & -M_{kq,s}\sin\theta \\ M_{fs}\cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & M_{kd,s}\cos(\theta-\frac{2\pi}{3}) & -M_{kq,s}\sin(\theta-\frac{2\pi}{3}) \\ M_{fs}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{kd,s}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & -M_{kq,s}\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Avec :

L_{s0}, L_{sv} , M_{s0} et M_{fs} sont définis au paragraphe (§V.1.1);

$M_{kd,s}$: L'inductance mutuelle maximale entre l'enroulement *kd* du rotor et le stator;

$M_{kq,s}$: L'inductance mutuelle maximale entre l'enroulement *kq* du rotor et le stator;

V.2.2 Modèle de Park des moteurs synchrones triphasés avec amortisseurs :

La figure (V.4) représente le modèle de Park d'un moteur synchrone triphasé à pole saillants avec amortisseurs.

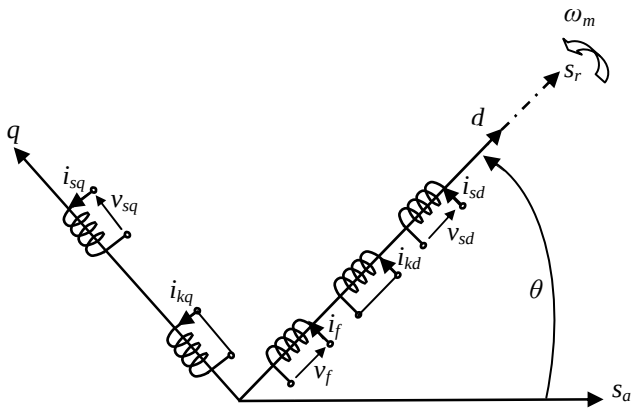


Fig. V.4 : Représentation schématique de la MS sans amortisseurs dans le repère de Park.

- **Equations des tensions**

Les tensions statoriques exprimées dans le référentiel (d, q) lié au rotor de la MS sont :

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s.i_{sd} + \dfrac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_m \psi_{sq} \\ v_{sq} = R_s.i_{sq} + \dfrac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_m \psi_{sd} \\ v_f = R_f.i_f + \dfrac{d\psi_f}{dt} \\ 0 = R_{kd}.i_{kd} + \dfrac{d\psi_{kd}}{dt} \\ 0 = R_{kq}.i_{kq} + \dfrac{d\psi_{kq}}{dt} \end{cases} \quad \text{(V.18)}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix} \quad \text{(V.19)}$$

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_{kd} \\ v_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & R_{kq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix} \quad \text{(V.20)}$$

- **Equations des flux**

Un développement identique a celui du paragraphe (§V.21), il vient pour flux :

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_d.i_{sd} + M_f.i_f + M_{kd}.i_{kd} \\ \psi_{sq} = L_q.i_{sq} + M_{kq}.i_{kq} \end{cases} \quad (V.21)$$

$$\begin{cases} \psi_f = L_f i_f + M_f i_{sd} + M_{fd} i_{kd} \\ \psi_{kd} = L_{kd} i_{kd} + M_{kd} i_{sd} + M_{fd} i_f \\ \psi_{kq} = L_{kq} i_{kq} + M_{kq} i_{sq} \end{cases} \quad (V.22)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_f \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_f & M_{kd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_{kq} \\ M_f & 0 & L_f & M_{fd} & 0 \\ M_{kd} & 0 & M_{fd} & L_{kd} & 0 \\ 0 & M_{kq} & 0 & 0 & L_{kq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad (V.23)$$

Avec :

L_d, L_q et M_f sont définis au paragraphe §V.1.2 ;

$M_{kd} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{kd,s}$: L'inductance mutuelle cyclique entre l'enroulement amortisseur *kd* et le stator;

$M_{kq} = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{kq,s}$: L'inductance mutuelle cyclique entre l'enroulement amortisseur *kq* et le stator.

- **Expression du couple électromagnétique**

En substituant les expressions des flux ψ_{sd} et ψ_{sq} données par l'équation (V.21), le couple s'exprime alors par :

$$C_{em} = p[M_f.i_f.i_{qs} + (L_d - L_q).i_{ds}.i_{qs} - M_{Kq}.i_{Kq}.i_{ds} + M_{Kd}.i_{Kd}.i_{qs}] \quad (V.24)$$

- **Equation mécanique**

L'équation mécanique devienne après substitution de l'expression du couple électromagnétique donnée par l'équation (V.214) dans l'équation générale d'une machine tournant exprimée par l'équation du mouvement (II.25) développée au chapitre II, §II.5.

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{p}{J}[M_f.i_f.i_{sq} + (L_d - L_q).i_{sd}.i_{sq} - M_{Kq}.i_{Kq}.i_{sd} + M_{Kd}.i_{Kd}.i_{sq}] - \frac{C_r}{J} - \frac{k_f}{J}\Omega_m \quad (V.25)$$

V.3 Modélisation des génératrices synchrones sans amortisseurs:

Considérons une génératrice synchrone à pôles saillants sans amortisseurs, représenté sur la Fig. V.5 :

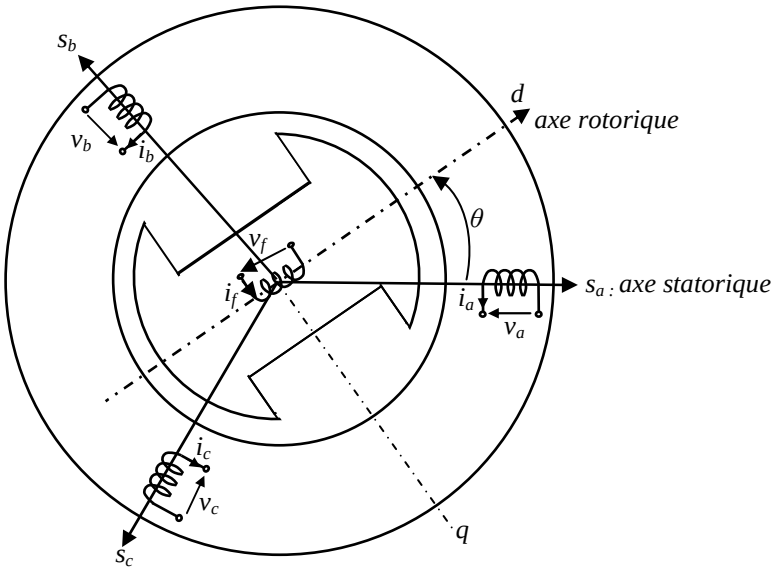


Fig. V.5 : Représentation schématique de la génératrice synchrone sans amortisseurs.

- **Equations des flux :**

A partir du modèle de la machine électrique généralisée dans le référentiel rotorique, on peut écrire pour les flux :

$$\begin{cases} \psi_{sd} = L_d . i_{sd} + M_f . i_f \\ \psi_{sq} = L_q . i_{sq} \\ \psi_f = L_f . i_f + M_f . i_{sd} \end{cases} \quad (V.26)$$

- **Equations des tensions :**

$$\begin{cases} -v_{sd} = R_s i_{sd} + \dfrac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_m \psi_{sq} \\ -v_{sq} = R_s i_{sq} + \dfrac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_m \psi_{sd} \\ v_f = R_f i_f + \dfrac{d\psi_f}{dt} \end{cases} \quad (V.27)$$

En tenant compte du système (V.26), les tensions s'écrivent sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} -v_{sd} = R_s i_{sd} + \dfrac{d}{dt}(L_d i_{sd} + M_f i_f) - \omega_m L_q i_{sq} \\ -v_{sq} = R_s i_{sq} + \dfrac{d}{dt}(L_q i_{sq}) + \omega_m (L_d i_{sd} + M_f i_f) \\ v_f = R_f i_f + \dfrac{d}{dt}(L_f . i_f + M_f . i_{sd}) \end{cases} \quad \text{(V.28)}$$

La mise sous forme matricielle de (V.27), donne :

$$\begin{bmatrix} -v_{sd} \\ -v_{sq} \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_m L_q & 0 \\ \omega_m L_d & R_s & \omega_m M_f \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & \omega_m & 0 \\ -\omega_m & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} \quad \text{(V.29)}$$

A vide, les courants des phases statoriques sont nuls ($i_{sd}=i_{sq}=0$), alors le système (V.28) devient:

$$\begin{cases} -v_{sd} = M_f \dfrac{di_f}{dt} \\ -v_{sq} = \omega_m M_f i_f \\ v_f = R_f i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \end{cases} \quad \text{(V.30)}$$

En analysant le système (V.30), il ne reste qu'une seule équation différentielle représentant l'état de la génératrice synchrone fonctionnant à vide.

$$\frac{di_f}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} i_f + \frac{v_f}{L_f} \quad \text{(V.31)}$$

Dans le cas où la génératrice alimente une charge R_{ch}, L_{ch} avec une tension d'excitation v_f , les tensions aux borne de la génératrice peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} v_{sd} = R_{ch} i_{sd} + L_{ch} \dfrac{di_{sd}}{dt} \\ v_{sd} = R_{ch} i_{sd} + L_{ch} \dfrac{di_{sd}}{dt} \end{cases} \quad \text{(V.32)}$$

Si on remplace les expressions de v_{sd}, v_{sq} de l'équation (V.32) dans le système (V.29), on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + R_{ch} & -\omega_m L_q & 0 \\ \omega_m L_d & R_s + R_{ch} & \omega_m M_f \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d + L_{ch} & \omega_m & 0 \\ -\omega_m & L_d + L_{ch} & 0 \\ 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} \quad \text{(V.33)}$$

Le système (V.33) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d + L_{ch} & 0 & M_f \\ 0 & L_d + L_{ch} & 0 \\ M_f & 0 & L_f \end{bmatrix}^{-1} \left\{ -\begin{bmatrix} R_s + R_{ch} & 0 & 0 \\ 0 & R_s + R_{ch} & 0 \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} - \omega_m \begin{bmatrix} 0_d & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & M_f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d + L_{ch} & 0_m & M_f \\ 0 & L_q + L_{ch} & 0 \\ M_f & 0 & L_f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_f \end{bmatrix} \quad \text{(V.34)}$$

Le système (V.29) est de la forme :

$$\frac{d}{dt}[X] = [A][X] + [B][U] \quad \text{(V.35)}$$

Avec :

$$[A] = -[L]^{-1}[Z] \; ; [B] = [L]^{-1} \; ; [X] = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_f \end{bmatrix} ; [U] = \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ v_f \end{bmatrix} ;$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_s + R_{ch} & 0 & 0 \\ 0 & R_s + R_{ch} & 0 \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} + \omega_m \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & M_f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [L]^{-1} = \begin{bmatrix} L_d + L_{ch} & 0_m & M_f \\ 0 & L_q + L_{ch} & 0 \\ M_f & 0 & L_f \end{bmatrix}^{-1}$$

- **Expression du couple électromagnétique :**

Dans le cas de l'absence des enroulements amortisseurs, l'expression générale du couple électromagnétique exprimée dans le repère de Park est identique a celle d'un moteur synchrone sans amortisseurs (équation (V.13)) affectée d'un signe (-) indiquant le mode de fonctionnement génératrice :

$$C_{em} = -p[M_f . i_f . i_{sq} + (L_d - L_q) . i_{sd} . i_{sq}] \quad \text{(V.36)}$$

- **Equation mécanique**

L'équation mécanique de la génératrice synchrone sans amortisseur est donnée par :

$$C_{ent} = J\frac{d\Omega}{dt} + p[M_f . i_f . i_{sq} + (L_d - L_q) . i_{sd} . i_{sq} + f_v \Omega_m \quad \text{(V.37)}$$

Où C_{ent} représente le couple d'entrainement appliqué au rotor de la génératrice.

V.4 Exercices

- **Exercice 1 :**

On considère une machine synchrone triphasée sans amortisseurs dont les enroulements sont représentés par la figure 1. On désigne par :

Les matrices courants et tensions au stator : $[i_{abc}]=\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$, $[v_{abc}]=\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$

Les matrices courants et tensions au rotor : $[i_f]=\begin{bmatrix} i_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[v_f]=\begin{bmatrix} v_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

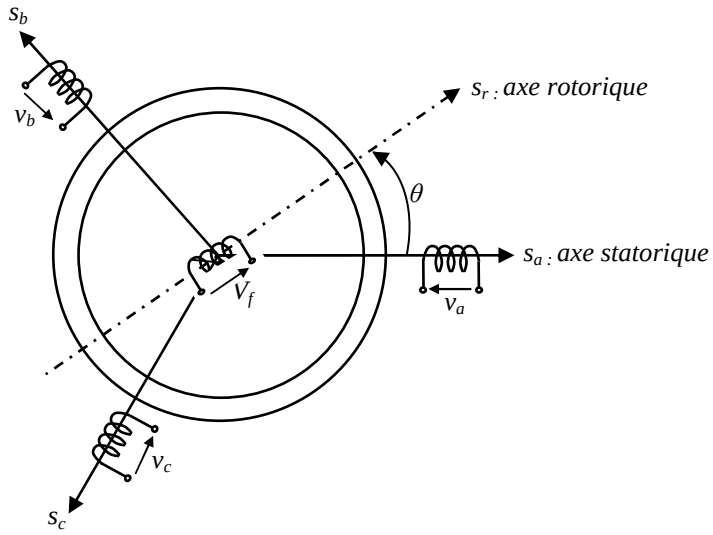


Fig. 6. : Enroulements d'une machine synchrone triphasée

1- Représenter sur le même schéma les enroulements diphasées fictifs correspondants selon PARK en précisant le choix du repère *dq* ;
2- Etablir le modèle mathématique de cette machine.
3- Le moteur synchrone avec cette structure ne peut démarrer seul. Il a toujours besoin d'un moyen de démarrage. Indiquer les.

- **Exercice 2 :**

On considère une machine synchrone triphasée dont les enroulements sont représentés par la Fig. Ex.1. Deux amortisseurs sont placés en quadrature au rotor:

On désigne par :

$[i_{abc}]=\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$; $[v_{abc}]=\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$: les matrices courants et tensions au stator et par

$[i_{f,kd,kq}]=\begin{bmatrix} i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}$; $[v_{f,kd,kq}]=\begin{bmatrix} v_f \\ v_{kd} \\ v_{kq} \end{bmatrix}$, Les matrices courants et tensions au rotor

1- Quel est le rôle de ces amortisseurs ;

2- Mettre les équations régissant le fonctionnement de la machine en régime dynamique sous forme matricielle ;

3- Représenter les enroulements de cette machine par deux armatures diphasées fictives selon PARK.

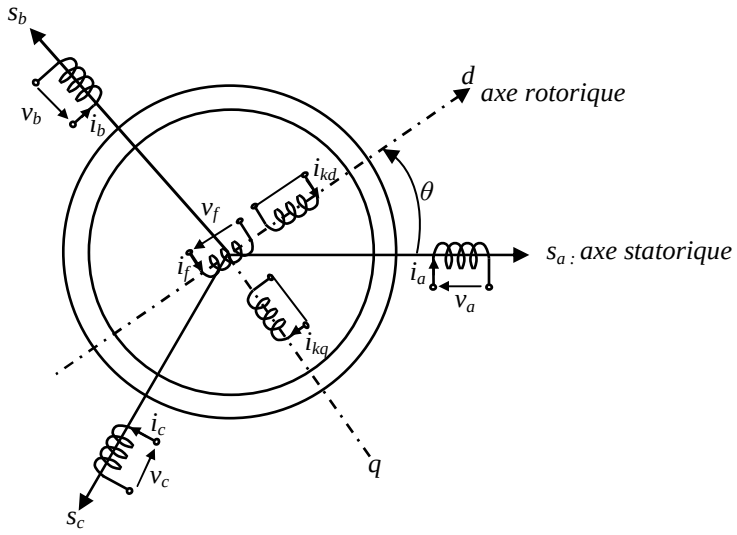


Fig. 7 : Enroulements d'une machine synchrone triphasée avec amortisseurs.

- **Exercice 3 :**

Considérons une machine synchrone triphasée. On rappelle que la transformation de PARK s'applique à tous les vecteurs : tension, courant et flux comme suit ;

$[X_{dqo}]=[P(\theta)][X_{abc}]$ avec : $[P(\theta)]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a+\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a-\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a+\frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

1- Exprimer i_d et i_q dans un intervalle [0, π/3] où i_1= -I_0, i_2 = I_0 et i_3= *0* en fonction de l'angle θ;

2- On note α l'angle existant entre le flux stator et le flux rotor. On donne $\theta = \alpha - 5\pi/6 + \omega t$. Calculer les valeurs moyennes de I_d , I_q et de i_d, i_q en fonction de α.

3- Exprimer les flux ϕ_d et ϕ_q. on appellera ϕ le flux inducteur, avec $\phi = kj$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABDESSEMED, "Modélisation et simulation des machines électriques", Ellipses, Collection, 2011.

[2] J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEUIER, « Introduction à l'électrotechnique approfondie », Technique et documentation, 1981.

[3] M. JUFER, « Les entraînements électriques: Méthodologie de conception », Hermès, Lavoisier, 2010.

[4] S. SMIGEL, « Modélisation et commande des moteurs triphasés », Commande vectorielle des moteurs synchrones", 2000.

[5] J.P. CARON, J.P. HAUTIER, « Modélisation et commande de la machine asynchrone », Technip, 1995.

[6] J.P. HAUTIER, J.P. CARON, « Systèmes Automatiques - Commande des processus », Cours et exercices corrigés. Tome 2, Ellipses, 1997.

[7] R. HUSSON, « Méthodes de commande des machines électriques », Hermes, 2002.

[8] G. STURTZER, E. SMIGIEL, « Modélisation et commande des moteurs triphasés », Ellipses, 2000.

[9] Y. PERRIARD, « Modélisation et commande des entraînements électriques », Revue internationale de génie électrique, volume 5, n°1/2002 : EPE'99, Hermes.

[10] M. PINARD, « Commande électronique des moteurs électriques », Dunod, 2007.

[11] L. JAULIN, « Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes », Hermes, 2005.

[12] A. MELAKHI, «Machine électrique », Polycopie de cours, Université Hassiba Benbouali de Chlef, 1997.