Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

FACULTÉ CHIMIE L1 UEF Maths2

Fiche de TD 2(2019/2020)

"Les équations différentielles."

Exercice 01

Résoudre les équations différentielles du 1er ordre à variables séparables suivantes :

1. $xy - y' = 0$; 2.$(1 + x^2)dy = ydx$; 3. $(x^2 + 2)y' + 2xy = 0$; ④. $y' - ye^x = 0$

Exercice 02

Résoudre les équations différentielles du 1er ordre suivantes :

1. $y' - y = e^x$ 2. $y' + \frac{y}{x} = \ln(x)$; 3.$y' + 2y = 1$; ④. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Exercice 03

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = xy^2$, 2. $y' + y = y^3e^{3x}$; ③.$y' + \frac{1}{x}y = -y^2 \ln x$

Exercice 04 I)Résoudre les équations différentielles linéaires du 2ème ordre suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 0$, 2. $y'' + 2y' + y = 0$, 3. $y'' - y' + y = 0$, ④$y'' + y = 0$,
5. $y'' + 2y' + y = xe^x$, 6.$y'' - y' - 2y = e^{2x}$ 7.$y'' + y = 2e^x + \cos(x)$, ⑧. $y'' + y = e^x$.

II)[**Exercice supplémentaires**] Donner l'expression des solutions particulières :

1. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$; 2.$y'' - 2y' + y = xe^x$, 3. $y'' + y = x^2e^x \sin(x)$;
4. $.y'' + 2y' + y = e^x + \sin(x)$; 5.$y'' + 4y = (x^2 + 1)e^x + e^{2x}\cos(x)$.

UTILE :

$f(x)$	Racines de l'équation caractéristique (E_r)	Solution particulière
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α n'est pas une solution (E_r)	$y_p = \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x^{\omega}\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$\alpha \pm i\beta$ n'est pas une solution (E_r)	$y_p = e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$ Avec $k \max n, m$	$\alpha \pm i\beta$ est une solution d'ordre ω (E_r)	$y_p = x\omega e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos(\beta x) + \tilde{Q}_k(x)\sin(\beta x))$

Avec $P_n(x), \tilde{P}_n(x)$ sont polynôme de degré n et $Q_m(x), \tilde{Q}_m(x)$ sont polynôme de degré m.

Bon courage!

Dr. I.Medjadj

Faculté de chimie L1 Maths2
Solution de la Fiche de TD 2(2019/2020)L1 Chimie

Exercice 01
Résoudre les équations différentielles du 1er ordre à variables séparables suivantes :

1. $xy - y' = 0 \Leftrightarrow y' = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx$
   On intégre : $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = ke^{\frac{x^2}{2}}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}$.
2. $(1+x^2)dy = ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = arctg(x) + c \Rightarrow y = ke^{arctg(x)}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}$.
3. $(x^2+2)y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x^2+2)\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{x^2+2} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x^2+2| + c, c \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow y = \frac{k}{x^2+2}$.

Exercice 02
Résoudre les équations différentielles du 1er ordre suivantes :

1. $(E) : y' - y = e^x$ on résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène : $(E_h) : y' - y = 0$ on a :
   $$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow y = Ke^x, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$
   On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose :
   $$y(x) = k(x)e^x \Rightarrow y' = k'(x)e^x + k(x)e^x.$$
   En remplaçant dans (E) on aura :
   $$y' - y = k'(x)e^x = e^x \Rightarrow k(x) = x.$$
   Ainsi la solution particulière est donc donnée par :$y_p(x) = xe^x$ et la solution générale est :
   $$y = ke^x + xe^x.$$
2. $(E) : y' + \frac{y}{x} = \ln(x)$;on résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène :
   $(E_h) : y' + \frac{y}{x} = 0$ on a :
   $$\frac{dy}{dx} = -y/x \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + c \Rightarrow y = \frac{K}{x}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$
   On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = \frac{k(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$ En remplaçant dans (E) on aura :
   $$y' - \frac{y}{x} = \frac{k'(x)}{x} = \ln(x) + c \Rightarrow k(x) = \int x\ln(x)dx.$$
   En utilisant l'intégration par parties on a :$k(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$ Ainsi la solution particulière est donc donnée par : $y_p(x) = \frac{1}{x}[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}]$ et la solution générale est :
   $$y = \frac{k}{x} + \frac{x}{2}\ln(x) - \frac{x}{4}.$$

3.$(E) : y' + 2y = 1$; résout d'abord l'équation sans second membre c'est à dire homogène :
$(E_h) : y' + 2y = 0$ on a :

$$\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \ln|y| = -2x + c \Rightarrow y = Ke^{-2x}, k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $y(x) = k(x)e^{-2x} \Rightarrow y' = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$ En remplaçant dans (E) on aura :

$$y' + 2y = k'(x)e^{-2x} = 1 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Ainsi la solution particulière est donc donnée par :$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2x} = \frac{1}{2}$ et la solution générale est :

$$y = ke^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 03
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = xy^2$, c'est une différentielle de Bernoulli, on divise (E_b) par y^2 on aura :$y'y^{-2} + 2y^{-1} = x$, puis on pose $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y'y^{-2}$ on obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme :

$$-z' + 2z = x...(E).$$

On commence par résoudre l'équation homogène

$$(E_h) : -z' + 2z = 0$$

on a :

$$\frac{dz}{dx} = 2z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 2dt \Rightarrow ln|z| = 2x + c \Rightarrow z = ke^{2x}, k = \pm e^c$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose

$$z(x) = k(x)e^{2x} \Rightarrow z' = k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x}.$$

En remplaçant dans (E) on aura :

$$-k'(x)e^{2x} - k(x)e^{2x} + k(x)e^{2x} = x \Rightarrow k(x) = \int -xe^{-2x}dx.$$

On calcule $k(x)$ par intégration par partie, on pose

$$u' = -e^{-2x} \Rightarrow u = \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\text{et} \quad v = x \Rightarrow v' = 1$$

alors

$$k(x) = \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

la solution particulière est donnée par

$$z_p = [\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}]e^{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$z(x) = ke^{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Enfin sachant que $y(x) = (z(x))^{-1}$ la solution de (E_p) est donnée par

$$y(x) = (ke^{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4})^{-1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + y = y^3e^{3x}$;

c'est une différentielle de Bernoulli, on divise (E_b) par y^3 on aura : :

$$y'y^{-3} + xy^{-2} = e^{3x},$$

puis on pose $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y'y^{-3}$ on obtient une équation différentielle du premier ordre (E) en z sous la forme :

$$-\frac{1}{2}z' + z = e^{3x}...(E).$$

On commence par résoudre l'équation homogène

$$(E_h) : -\frac{1}{2}z' + z = 0$$

on a :

$$\frac{dz}{dx} = 2z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 2dx \Rightarrow ln|z| = 2x + c \Rightarrow z = ke^{2x}, k = \pm e^c$$

On cherche ensuite une solution particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose

$$z(x) = k(x)e^{2x} \Rightarrow z' = k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x}.$$

En remplaçant dans (E) on aura :

$$-\frac{1}{2}k'(x)e^{2x} - k(x)e^{2x} + k(x)e^{2x} = e^{3x} \Rightarrow k(x) = -2\int e^x dx.$$

On calcule $k(x)$ par intégration , on a $k(x) = -2e^x$, alors la solution particulière est donnée par

$$z_p = [-2e^x]e^{x2} = -2e^{3x}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$z(x) = ke^{x2} - 2e^{3x}.$$

Enfin sachant que $y(x) = (z(x))^{\frac{-1}{2}}$ la solution de (E_p) est donnée par

$$y(x) = (ke^{x^2} + -2e^{3x})^{\frac{-1}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04 I)Résoudre les équations différentielles linéaires du 2ème ordre suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 0 : (E_h)$ commençons par déterminer équation caractéristique associée à (E_h) qui définie par

$$E_r : r^2 - r - 2 = 0$$

les solutions de cette équations sont :$-1, 2$ des solutions simples ainsi la solution de cette équation du second ordre est donnée comme suit

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0, (E_h)$ commençons par déterminer équation caractéristique associée à (E_h) qui définie par

$$E_r : r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

la solution de cette équation est :-1 solution double ainsi la solution de cette équation du second ordre est donnée comme suit

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $(E_h) : y'' - y' + y = 0$, l'équation caractéristique associée est

$$r^2 - r + 1 = 0$$

admet comme solutions simples $r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}[c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)], c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. $(E) : y'' + 2y' + y = xe^x$, d'après 2 la solution de l'équation homogéne est $y_h(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. la solution générale de (E), est la somme de la solution générale de (E_h) et de la solution particulière y_p nous allons utiliser le tableau précédent, puisque 1 n'est pas un racine de $(E_r) : r^2 + 2r + 1 = 0$, alors y_p sous la forme suivante $y_p = (ax + b)e^x$ pour trouver y_p il faut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que y_p vérifie (E). En remplaçant dans (E) on aura :

$$e^x(4ax + 4a + 4b) = xe^x \Rightarrow \begin{cases} 4ax = x \Rightarrow a = 1/4 \\ 4a + 4b = 0 \Rightarrow b = -1/4. \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{4}(x - 1)e^x.$$

La solution générale :

$$y_g = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{4}(x - 1)e^x.$$

6. $(E) : y'' - y' - 2y = e^{2x}$ d'après 1 la solution de l'équation homogéne $y'' - y' - 2y = 0$ est $y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. la solution générale de (E), est la somme de la solution générale de (E_h) et de la solution particulière y_p qui sous la forme :$y_p = axe^{2x}$ car 2 est une racine simple $\omega = 1, x^\omega = x^1$, pour trouver a on remplace dans (E), on aura :

$$3ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

$$y_p = \frac{x}{3}e^{2x}.$$

La solution de (E) :

$$y_g = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{x}{3}e^{2x}.$$

7. $(E) : y'' + y = 2e^x + \cos(x), (E_r) : r^2 + 1 = 0$ admet $r_1 = i, r_2 = -i$ comme racines simples, ainsi la solution de $(E_h) : y'' + y = 0$, est donnée par :

$$y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

la solution générale de (E), est la somme de la solution générale de (E_h) et de la solution particulière y_p. La solution particulière est donnée par

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}, \textit{ le principe de superposition.}$$

où y_{p1} est la solution particulière de $(E_1) : y'' + y = 2e^x$, sachant que 1 n'est pas solution de (E_r)

$$y_{P1} = ae^x.$$

et y_{P2} est la solution de $(E_2) : y'' + y = \cos(x)$, sanchant $\pm i$ est une racine simple de (E_r) donc

$$y_{P2} = x^1(b \sin(x) + c \cos(x)).$$

Pour déterminer les constantes on remplace y_{P1} dans (E_1) et y_{P2} dans (E_2) on aura : $a = 1, y_{P1} = e^x$ et $c = 0, b = \frac{1}{2}, y_{P2} = \frac{x}{2}\sin(x)$.

$$y_p = y_{P1} + y_{P2} = e^x + \frac{x}{2}\sin(x)$$

La solution de (E) :

$$y_g = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + e^x + \frac{x}{2}\sin(x).$$

Dr. I.Medjadj