Momentum Theory- Froude (1887) : Théorie de l'impulsion :

Dans cette théorie, également appelée parfois théorie de l'impulsion, l'hélice est régulière : elle donne à la fois une vitesse axiale et angulaire au fluide s'écoulant à travers le disque de l'hélice. Considérons un disque avec une surface A_0 avançant à une vitesse V_A, tout en tournant avec une vitesse angulaire ω. Soit les vitesses axiales et angulaires du fluide :

— Loin devant du disque : V_A et 0
— Loin derrière du disque : $V_A + v_2$ et ω_2
— Juste devant du disque : $V_A + v_1$ et ω_1
— Juste à l'arrière du disque : $V_A + v_1$ et ω_1

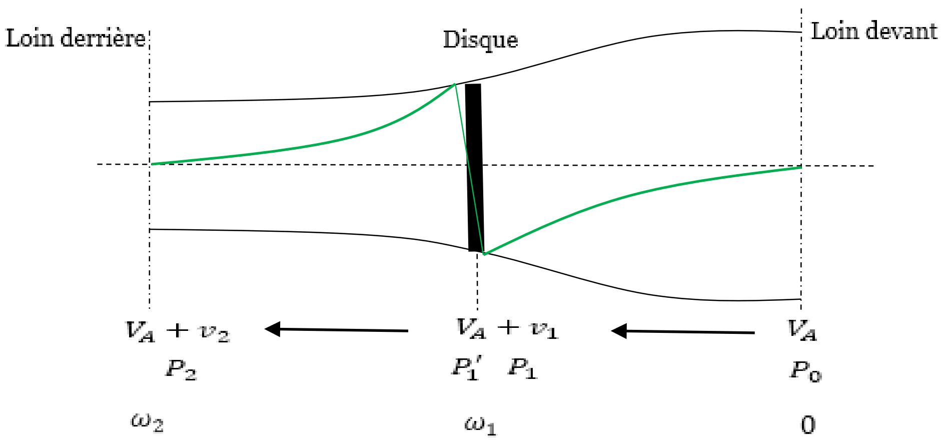

Fig. 02 Représentation des vitesses axiales et angulaires.

La masse du fluide par unité de temps traversent le disque de l'hélice entre r et $r + dr$ est donnée comme suit :

$$dm = \rho dA_0(V_A + v_1) \tag{15}$$

Avec :

dA_0: surface élémentaire.

La poussée élémentaire développée par le disque est le changement de quantité de mouvement axiale par unité de temps :

$$dT = dm\,[(V_A + v_2) - V_A] = \rho dA_0(V_A + v_1)v_2 \tag{16}$$

Email : samir.belhenniche@univ-usto.dz

Le couple élémentaire fournie à l'hélice est le changement de quantité de mouvement angulaire par unité de temps :

$$dQ = dm\, r^2(\omega_2 - 0) = \rho dA_0(V_A + v_1)\omega_2\, r^2 \tag{17}$$

Le travail fourni par la poussée élémentaire est égale à la différence (augmentation) de l'énergie cinétique du fluide s'écoulant à travers l'élément :

$$dT\,(V_a + v_1) = \frac{1}{2} dm \left[(V_A + v_2)^2 - {V_A}^2\right] \tag{18}$$

$$\rho dA_0(V_A + v_1)v_2(V_A + v_1) = \frac{1}{2}\rho dA_0(V_A + v_1)v_2(2V_A + v_2) \tag{19}$$

On obtient :

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2 \tag{20}$$

Déjà obtenu dans la théorie de quantité de mouvement axial. Le travail fourni par unité de temps par l'élément est égale à la différence (augmentation) de l'énergie cinétique du fluide s'écoulant à travers l'élément.

$$dQ\omega_1 = \frac{1}{2} dm\, r^2[\omega^2 - 0] \tag{21}$$

$$dQ\omega_1 = \frac{1}{2}\rho dA_0(V_A + v_1)\omega_2^2\, r^2 \tag{22}$$

$$\rho dA_0(V_A + v_1)\omega_2 r^2\omega_1 = \frac{1}{2}\rho dA_0(V_A + v_1)\omega_2^2\, r^2 \tag{23}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 \tag{24}$$

Le travail (ou la puissance) doit être égale à la différence (l'augmentation) de l'énergie cinétique (axiale et rotationnelle).

$$dQ\omega = dT\,(V_A + v_1) + dQ\omega_1 \tag{25}$$

$$\eta = \frac{dTV_A}{dQ\omega} = \frac{(\omega - \omega_1)V_A}{(V_a + v_1)\omega} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}{\left(1 + \frac{v_1}{V_A}\right)} = \frac{1 - a'}{1 + a} \tag{26}$$

a: Facteur d'écoulement axial.

Email : *samir.belhenniche@univ-usto.dz*

a': Facteur d'écoulement rotationnel.

Où $a' = \omega_1/\omega$ et $a = v_1/V_A$ sont les facteurs d'écoulement rotationnel et axial, v_1 et v_2 sont respectivement les vitesses induites axiales au voisinage et loin derrière l'hélice. ω_1 et ω_2 les vitesses induites angulaires. Il est clairement montré que l'effet de rotation réduit clairement le rendement.

On remplace :

$dA_0 = 2\pi r dr$, $v_1 = aV_A$, $v_2 = 2aV_A$, $\omega_1 = a'\omega$, $\omega_2 = 2a'\omega$

Dans l'équation (16) et (17) et on obtient :

$$dT = 4\pi\rho r dr {V_A}^2 a(1+a) \quad (27)$$

$$dQ = 4\pi\rho r^3 dr V_A \omega a'(1+a) \quad (28)$$

Donc le rendement élémentaire devient :

$$\eta = \frac{dTV_A}{dQ\omega} = \frac{4\pi\rho r dr {V_A}^2 a(1+a)}{4\pi\rho r^3 dr V_A \omega a'(1+a)} = \frac{a}{a'}\frac{{V_A}^2}{\omega^2 r^2} \quad (29)$$

On fait l'égalité entre l'équation (29) et (26) :

$$\eta = \frac{a}{a'}\frac{{V_A}^2}{\omega^2 r^2} = \frac{1-a'}{1+a} \quad (30)$$

Et ça donne :

$$a'\omega^2 r^2(1-a') = a(1+a){V_A}^2 \quad (31)$$

L'équation (31) est une relation entre les vitesses induites axiale et rotationnelle.

Application 03 :

Une hélice ayant un de diamètre $D = 4\ m$ et une vitesse de rotation $n = 180\ rpm$ se déplace avec une vitesse d'avance $4\ m/s$. La poussée fournit par L'élément de l'hélice à $0.7\ m$ est de $200\ KN/m$. En appliquant le théorème de quantité de mouvement et en prenant en considération l'effet de rotation du fluide :

1. Représenter les pressions, les vitesses axiales, et les vitesses angulaires ?
2. Calculer Facteurs d'écoulement axial et rotationnel a et a' ?
3. Calculer le couple élémentaire ?

Email : samir.belhenniche@univ-usto.dz

4. En déduire le rendement élémentaire ?

Solution :

1. Les vitesses axiales et angulaires loin devant loin derrière, juste devant et juste à l'arrière de l'hélice sont représenter dans la figure 02.
2. **Calcul des facteurs d'écoulement axial et rotationnel a et a' :**

On a :

$$a = \frac{v_1}{V_A}$$

$$a' = \frac{\omega_1}{\omega}$$

Donc :

$v_1 = aV_A$; $\omega_1 = a'\omega$

$v_2 = 2aV_A$; $\omega_2 = 2a'\omega$

On a aussi :

$dA_0 = 2\pi r dr$

Et :

$$dT = \rho dA_0 (V_A + v_1) v_2 = 4\pi\rho r dr {V_A}^2 a(1+a) \qquad \text{(I)}$$

$$dQ = \rho dA_0 (V_A + v_1) \omega_2\, r^2 = 4\pi\rho r^3 dr V_A \omega a'(1+a) \qquad \text{(II)}$$

A partir de (I) :

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi\rho r {V_A}^2 a(1+a) = 200$$

$4\pi. 1025.1,4. 6^2. a(1+a) = 200$

$a + a^2 = 0,308 \Rightarrow a + a^2 - 0,308 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4.(1).(-0,308) = 2,232$

$$a = \frac{-1 + \sqrt{2,232}}{2} = 0,247$$

$a = 0,247$

On a :

$$\eta = \frac{dTV_A}{dQ\omega} = \frac{4\pi\rho r dr {V_A}^2 a(1+a)}{4\pi\rho r^3 dr V_A \omega a'(1+a)} = \frac{a}{a'}\frac{{V_A}^2}{\omega^2 r^2} = \frac{1-a'}{1+a} \qquad \text{(III)}$$

Donc :

$$a'\omega^2 r^2 (1-a') = a(1+a){V_A}^2 \qquad \text{(IV)}$$

$(3.2\pi)^2 . 1,4^2 a'(1-a') = a(1+a). 6^2$

$(6\pi)^2 . 1,4^2 a'(1-a') = 0,247.(1+0,247). 6^2$

Email : samir.belhenniche@univ-usto.dz

$a'(1-a') = 0{,}0159 \Rightarrow a'^2 - a' + 0{,}0159 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4.(1).(0{,}0159) = 0{,}9364$

$$a' = \frac{1-\sqrt{0{,}9364}}{2} = 0{,}01619$$

$a' = 0{,}01619$

3. Calcul du couple élémentaire :

À partir de l'équation (II) on a :

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi\rho r^3 V_A \omega a'(1+a)$$

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi.1025.1{,}4^3.6.6\pi.0{,}01619.1{,}247 = 80{,}696\ KN.m.m^{-1}$$

$$\frac{dQ}{dr} = 80{,}696\ KN.m.m^{-1}$$

4. Calcul du rendement :

$$\eta = \frac{1-a'}{1+a} = \frac{1-0{,}01619}{1+0{,}247} = 0{,}7889$$

Ou bien :

$$\eta = \frac{\frac{dT}{dr}V_A}{\frac{dQ}{dr}\omega} = \frac{200.6}{80{,}696.6\pi} = 0{,}7889$$