Université des Sciences et de la Technologie D'Oran
Faculté MI - Département de Mathématiques

Master1 : TD2 MMC **2019-2020**

Exercice 1

On considère un mouvement définie dans la base canonique par sa représentation Lagrangienne :

$$(P_2) : \begin{cases} x_1 &= X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t), \\ x_2 &= X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t), \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

1. Calculer $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$; $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ et le tenseur de déformation $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$. Conclure.
2. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène φ' à l'instant $t_0 = 0$. Calculer le jacobien de la transformation.
3. Calculer le champ de vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et le champ d'acceleration $\underline{\gamma}(\underline{X}, t)$ en coordonnées Lagrangiennes.
4. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\underline{V}(\underline{X}, t)$ et le champ d'acceleration $\underline{\gamma}(\underline{X}, t)$ en coordonnées Euleriennes.

Exercice 2

En partant de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}$ où $\underset{\sim}{R}$ est le tenseur rotation orthogonal et $\underset{\sim}{U}$ le tenseur symétrique défini positif , trouver la décomposition du tenseur gradient des vitesses $\underset{\sim}{L}(\underline{x}, t)$.

Exercice 3

Soit un milieu soumis à un tenseur de déformations dont la matrice relative à un repère est donnée par $\underset{\sim}{E}$:tel que :$[\underset{\sim}{E}] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer la trace de $\underset{\sim}{E}$ ainsi que son determinant et la matrice de $\underset{\sim}{E}^2$.
2. En déduire $E_{II} = 1/2((tr\underset{\sim}{E})^2 - tr(\underset{\sim}{E}^2))$ ainsi que le polynome caractéristique de $\underset{\sim}{E}$.
3. Développer le déterminant de $\underset{\sim}{E} - \lambda.I$ et retrouver l'expression du polynome caractéristique.
4. Déterminer les déformations principales $E_1; E_2; E_3$ (i.e les valeurs propres de $\underset{\sim}{E}$).
5. Ordonner les déformations principales, puis calculer les coordonnées du vecteur propre b_2 correspondant à la déformation principale intermédiaire E_2.

Exercice 4

On étudie la transformation dite **extension simple** qui fait passer le corps matériel de la configuration à gauche à la configuration à droite de la Figure (2.2). Elle s'écrit dans la base cartésienne orthonormée

$$\begin{cases} x_1 &= X_1(1+\lambda), \\ x_2 &= X_2, \\ x_3 &= X_3 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

1. Donner les tenseurs gradient de la transformation $\underset{\sim}{F}$, de Cauchy-Green droit $\underset{\sim}{C}$, de déformations $\underset{\sim}{E}$ en coordonnées et en notation tensorielle.

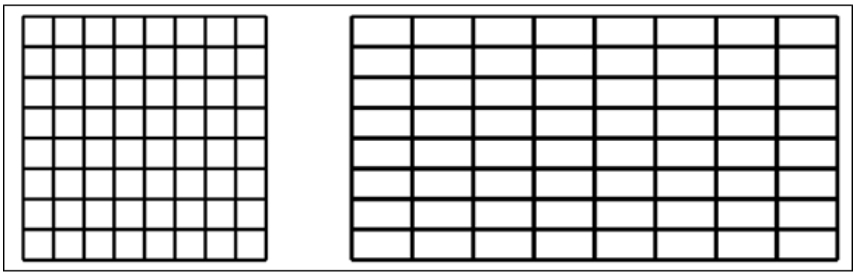

FIGURE 1 – Extension simple : état initial à gauche, état final à droite.

2. Montrer que $\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{H}^t + \underset{\sim}{H}^t \underset{\sim}{H})$ où $\underset{\sim}{H} = \mathrm{grad}\underline{u} = \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{I}$
3. En déduire le tenseur de déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\varepsilon}$ en coordonnées et en notation tensorielle.

Exercice 5

La transformation illustrée sur la Figure (2.3) porte le nom de glissement simple et s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 + \gamma X_2, \\ x_2 & = & X_2, \\ x_3 & = & X_3 \end{array} \right. \tag{0.0.2}$$

où γ est l'amplitude du glissement (penser à un jeu de cartes).

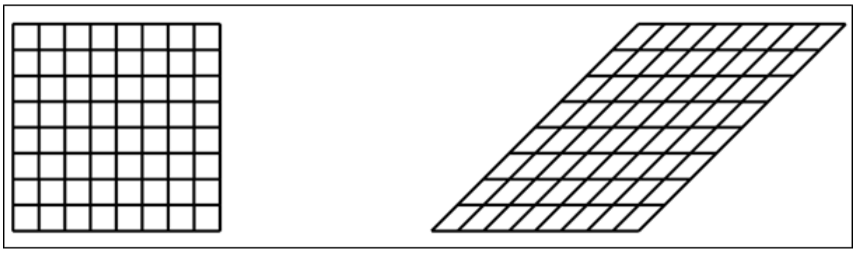

FIGURE 2 – glissement simple : état initial à gauche, état final à droite.

1. Donner Le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ en coordonnées et en notation tensorielle.
2. Déterminer Le tenseur de Cauchy-Green droit $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$,
3. Calculer les valeurs et vecteurs propres associés à $[\underset{\sim}{\mathbf{C}}]$,
4. Montrer qu'il existe un tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ tel que $[\underset{\sim}{\mathbf{U}}]^2 = [\underset{\sim}{\mathbf{C}}]$,
5. En déduire l'expression du tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$,
6. Montrer que $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ est orthogonal.