Chapitre 3 :

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1/ INTRODUCTION

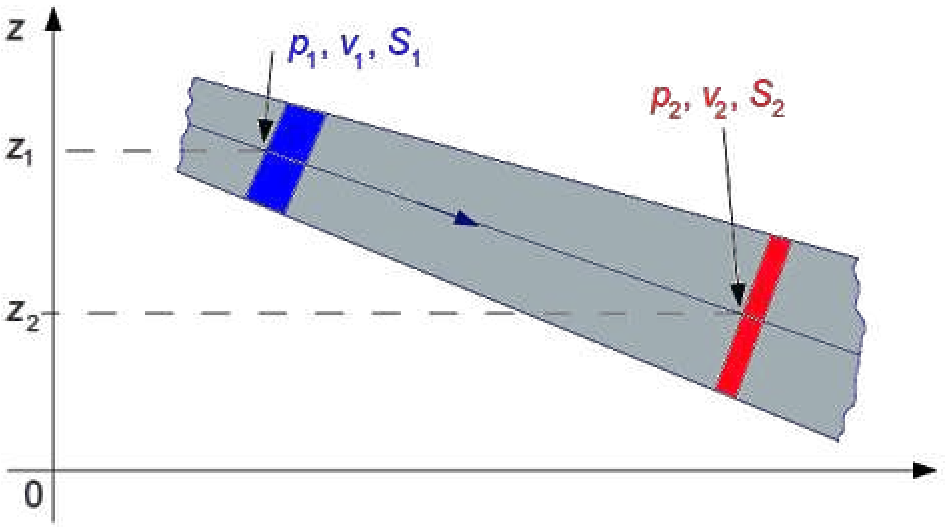
- La dynamique signifie que les fluides **en mouvement**. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes.

- On utilise les équations qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits :

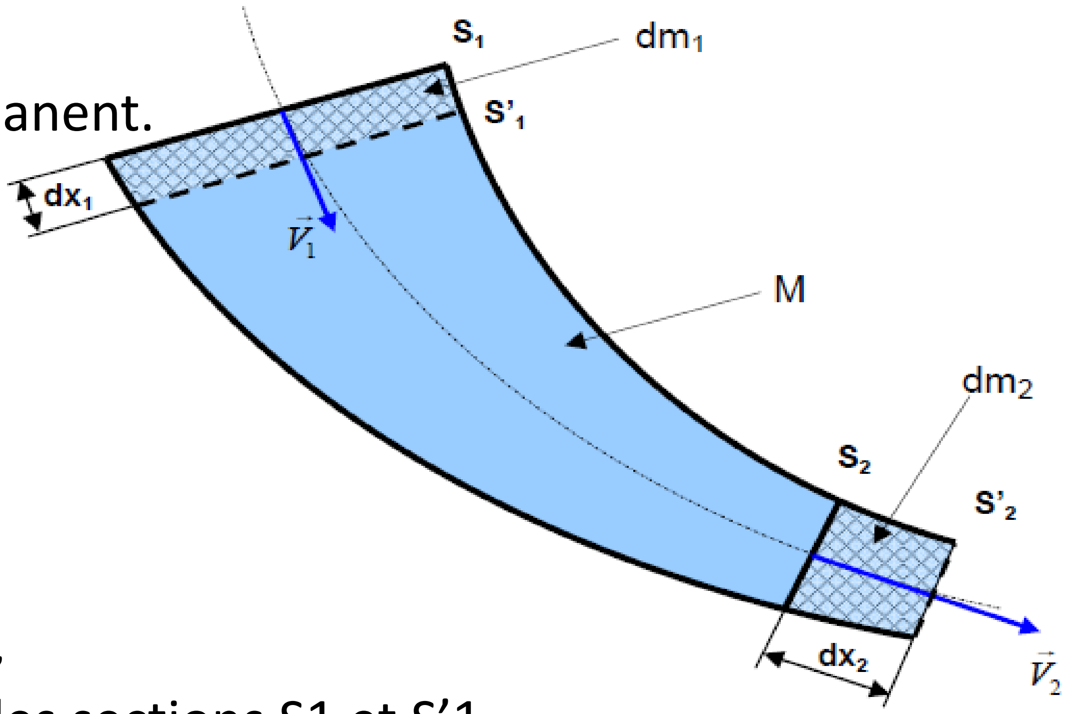
- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie),
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement).

2/ ECOULEMENT PERMANENT

L’écoulement d’un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs de vitesse des particules fluides est constant à l’instant t.



3/ EQUATION DE CONTINUITE



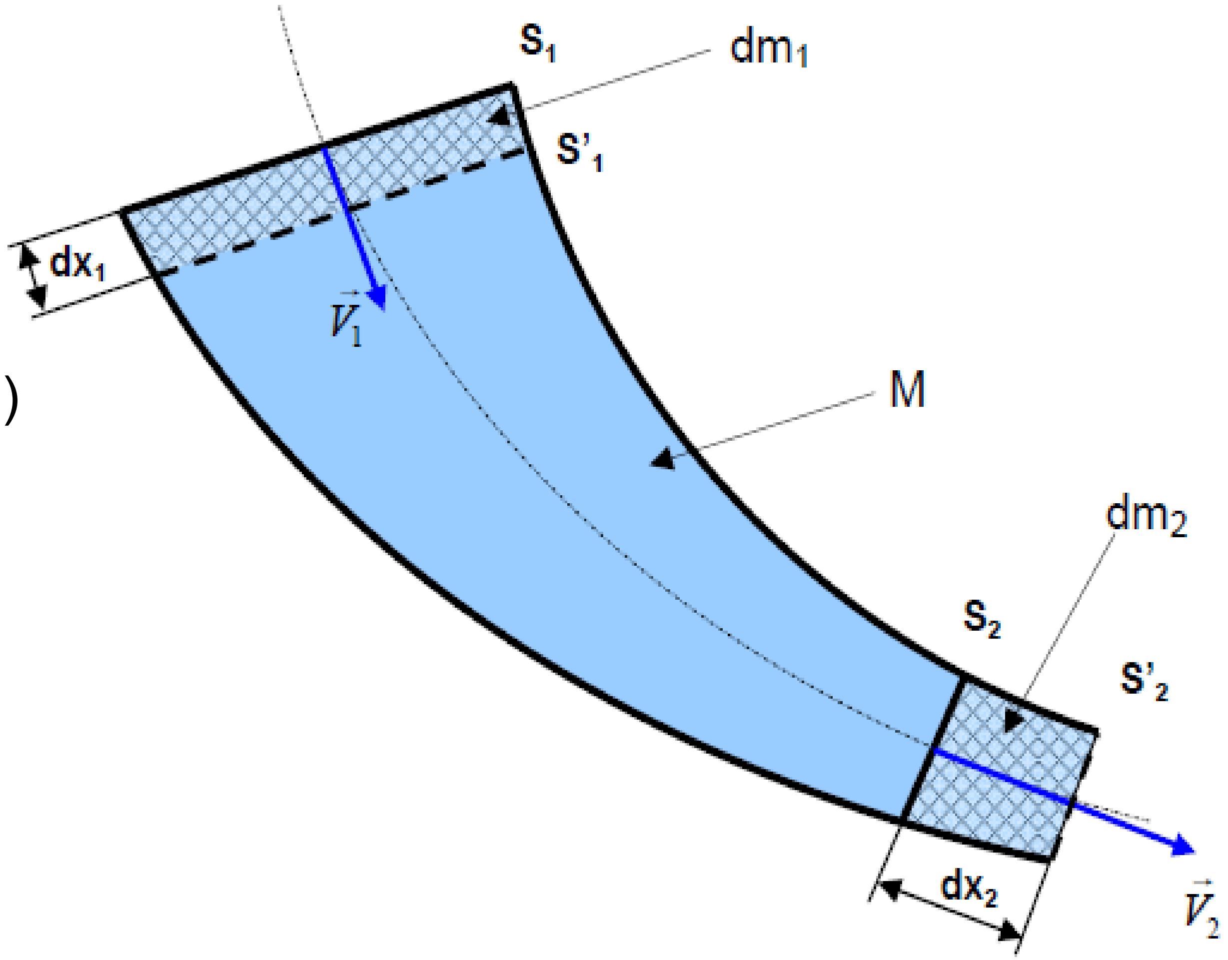
- Considérons une veine d'un fluide incompressible
de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.
- **S1 et S2** respectivement la section d'entrée et
la section de sortie du fluide à l'instant t,
- S'1 et S'2 respectivement les sections
d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt),
- $\boldsymbol{V_1}$ **et** $\boldsymbol{V_2}$ les vecteurs vitesse d'écoulement.
- **dx1 et dx2 :** respectivement les déplacements
des sections S1 et S2 pendant l'intervalle de temps dt,
- **dm1 :** masse élémentaire entrante comprise entre les sections S1 et S'1,
- **dm2 :** masse élémentaire sortante comprise entre les sections S2 et S'2,
- **dV1 :** volume élémentaire entrant compris entre les sections S1 et S'1,
- **dV2 :** volume élémentaire sortant compris entre les sections S2 et S'2,

On a : $dV_1 = dV_2$ .... (1)

Puisqu'on a : $\rho = \frac{m}{V}$

$\frac{dm_1}{\rho} = \frac{dm_2}{\rho}$ (car $\rho : constante$)

Donc : $dm_1 = dm_2$ (Conservation de la masse)



D'après la relation (1) :

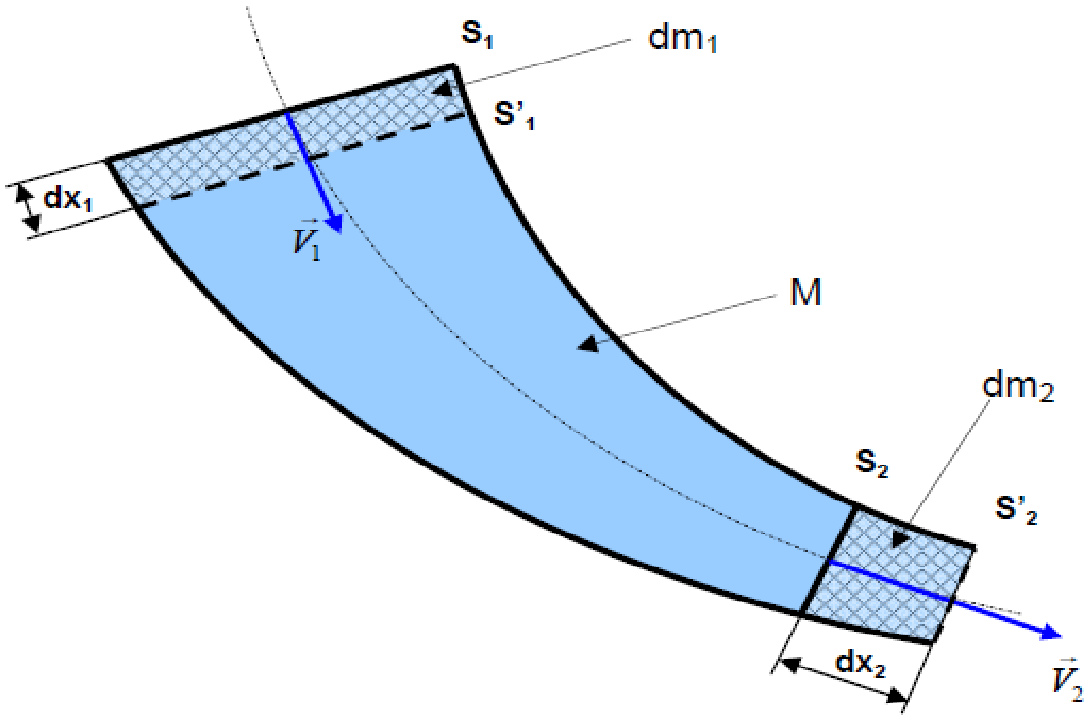
$dV_1 = dV_2$

$S_1 . dx_1 = S_2 . dx_2$

On divise l'équation par dt : $S_1 \frac{dx_1}{dt} = S_2 \frac{dx_2}{dt}$

Alors, on obtient :

$S_1 . V_1 = S_2 . V_2 =$ Constante



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = C^{ste}$$ est l'équation de la continuité

4/ NOTION DE DEBIT

4.1/ Débit volumique

Le débit volumique est le rapport entre le volume écoulé par unité du temps.

$$\boxed{Q_V = \frac{dV}{dt}}$$

en notant que : $dV = S \,.\, dx$ on peut écrire également que :

$$Q_V = \frac{dV}{dT} = \frac{Sdl}{dt} = Sv_{moy}\,, \quad [\mathrm{m^3/s}]$$

- **4.2/ Débit massique**

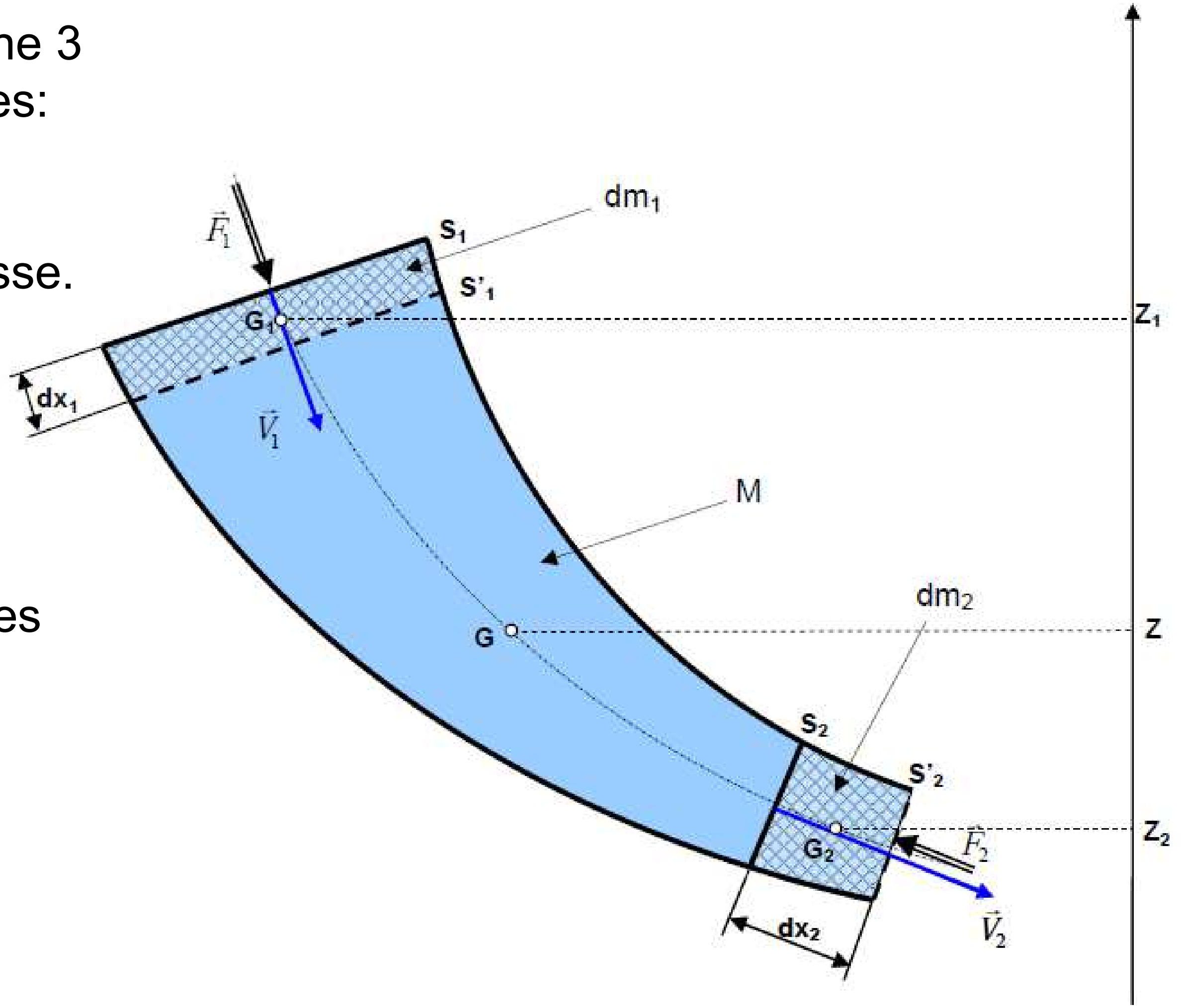
C’est la masse de fluide par unité de temps :

$$Q_m = \frac{dm}{dT} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho Q_V \,, \quad [\mathrm{kg/s}]$$ (Relation entre Qm et Qv)

5/ THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:
- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe Z vertical dirigé vers le haut.
On note Z_1, Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses
dm_1, dm_2 et M.
On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du
fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.



A l'instant t le fluide de masse (dm1 + M) est compris entre S1 et S2. Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm2) est compris entre S'1 et S'2. Son énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 \Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 = P_1.dV_1 - P_2.dV_2$$

en simplifiant on obtient : $dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0}$$

L’unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

D’après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}+g.z_2=\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+g.z_1}$$

6/ THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2. Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η. Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{net}}{P_a}}$$

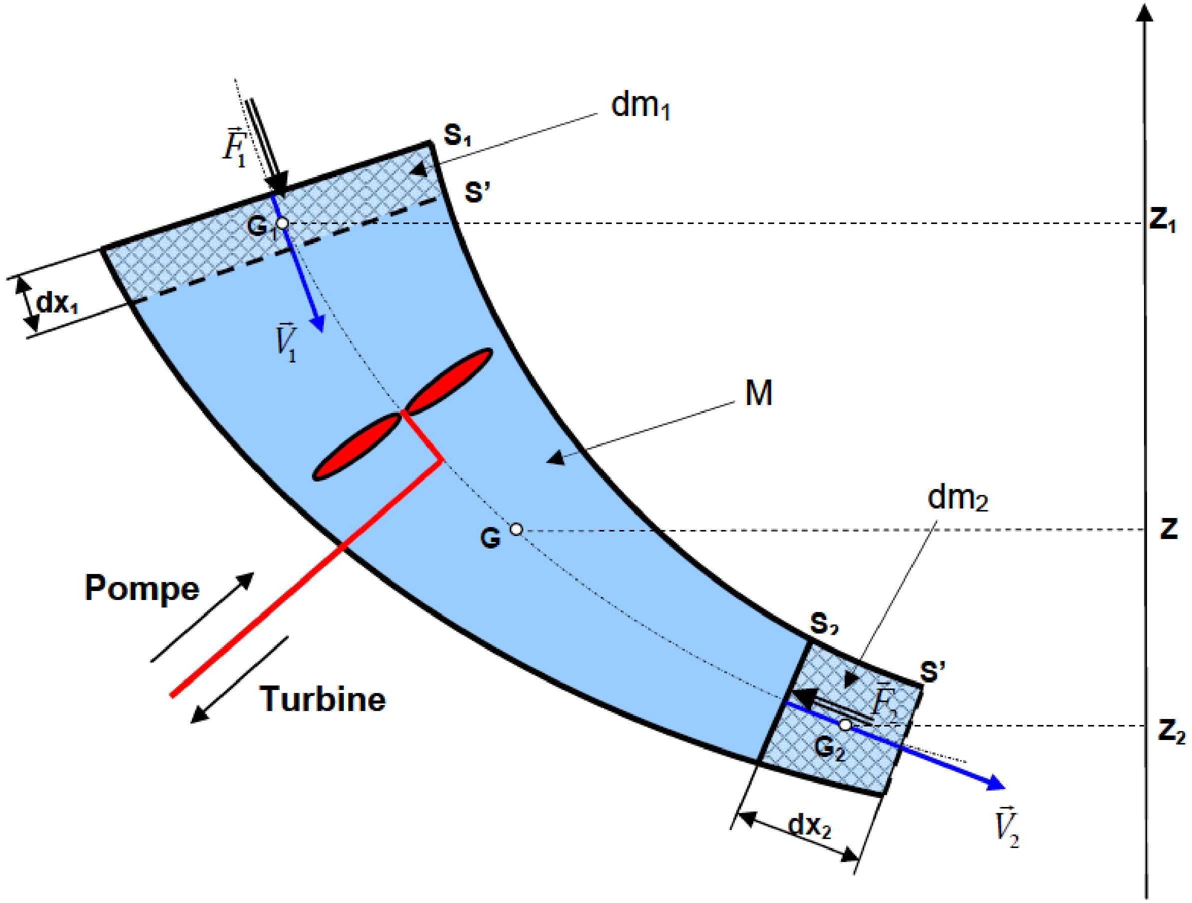
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\eta = \frac{P_a}{P_{net}}}$$

Entre les instant t et t'=(t+dt), le fluide a échange un travail net $W_{net} = P_{net}.dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.

A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$



A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre S'_1 et S'_2. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »,en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$$E'_{mec} - E_{mec} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 + P_{net}.dt$$

$E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 + P_{net.}.dt = P_1.dV_1 - P_2.dV_2 + P_{net}.dt$ en simplifiant on aura :

$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2 + P_{net}.dt$ Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

on aboutie à l'équation de Bernoulli : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}}$ (5)

- <u>Quantité de mouvement (*THEOREME D'EULER)*</u>

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

- Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}ext = \frac{d\vec{P}}{dt}$$ avec $\vec{P} = m\vec{V}_G$: quantité de mouvement.

$$\boxed{\sum \overline{F}ext = q_m(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})}$$