

Blade element theory- Froude (1878) :(théorie de l'élément de pale):

La théorie de l'élément de pale (*Blade element theory*), contrairement à la théorie de l'impulsion (théorie de l'actuator), s'intéresse à la façon dont l'hélice génère sa poussée et à la façon dont cette poussée dépend de la forme des pales de l'hélice. La théorie de l'élément de pale est basée sur la division de la pale en un grand nombre de sections, produisant une force hydrodynamique due à son mouvement dans le fluide.

La composante axiale de cette force hydrodynamique est la poussée de l'élément tandis que le moment autour de l'axe de rotation de l'hélice de la composante tangentielle est le couple de l'élément. L'intégration de la poussée et du couple de l'élément sur le rayon pour toutes les pales donne la poussée et le couple de l'hélice.

Considérons un hydrofoil de corde c et une longueur l , la vitesse d'écoulement V_∞ d'un fluide de densité ρ fait un angle d'attaque α avec l'hydrofoil, comme le montre la figure 1.

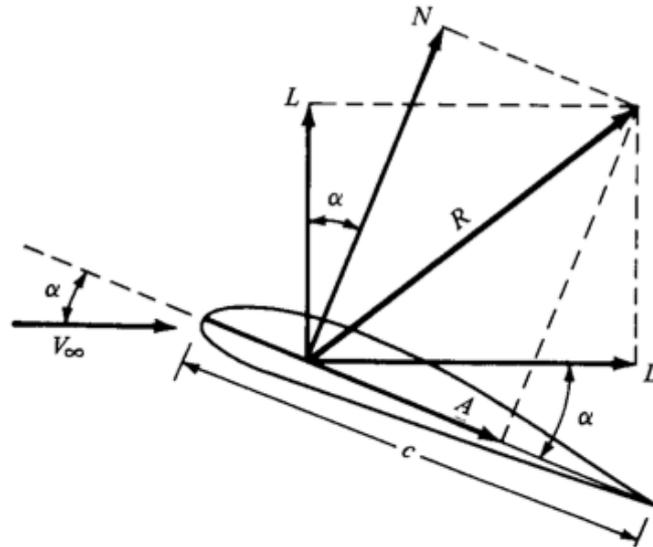


Figure 01 Forces agissantes sur un hydrofoil.

L'hydrofoil développe une force hydrodynamique dont la composante normale et parallèle à la vitesse V_∞ sont la portance L et la traînée D . On définit les coefficients de portance et de traînée non dimensionnels comme suit :

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho A V_\infty^2} \quad (1)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho A V_\infty^2} \quad (2)$$

Où $A = c.l$ est la surface de l'hydrofoil. Ces coefficients dépendent de la forme de la section de l'aile, du rapport l/c et de l'angle d'attaque α , et sont souvent déterminés expérimentalement tunnel hydrodynamique. Ces valeurs expérimentales peuvent ensuite être utilisées dans la théorie de l'élément de pale.

Considérons maintenant une hélice ayant un nombre de pales Z , un diamètre D et un pas réduit P/D avançant avec une vitesse V_A . Cette hélice tourne avec une vitesse de rotation n . Prenant un élément de pale entre les rayons r et $r + dr$, la vitesse axiale est V_A tandis que la vitesse tangentielle est $V_T = 2\pi nr$. La résultante entre la vitesse axiale et tangentielle est la vitesse V_R faisant un angle d'incidence α avec l'élément de pale comme le montre la figure 2.

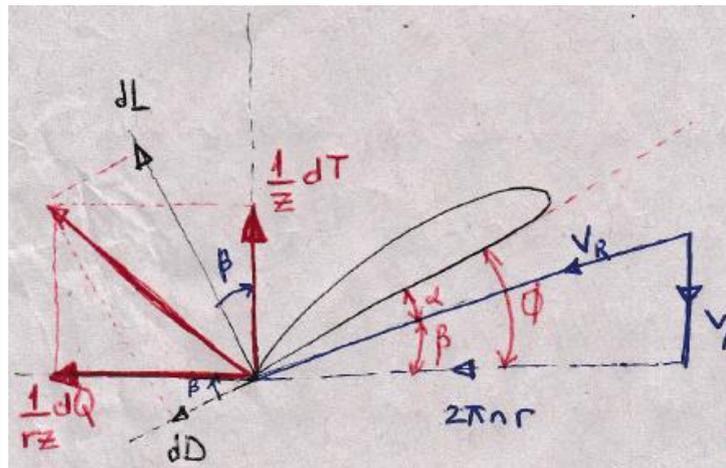


Figure 02 Forces et vitesses sur un élément de pale

$$dL = \frac{1}{2} C_L \rho c dr V_R^2 \quad (3)$$

$$dD = \frac{1}{2} C_D \rho c dr V_R^2 \quad (4)$$

Si la poussée et le couple de toutes les pales Z produites par un élément de pale entre les rayons r et $r + dr$ sont dT et dQ , alors :

$$\frac{1}{Z} dT = dL \cos\beta - dD \sin\beta = dL \cos\beta \left(1 - \frac{dD}{dL} \tan\beta\right) \quad (5)$$

$$\frac{1}{rZ} dQ = dL \sin\beta + dD \cos\beta = dL \cos\beta \left(\tan\beta + \frac{dD}{dL}\right) \quad (6)$$

Avec :

$$\tan\beta = \frac{V_A}{2\pi nr} \quad (7)$$

On met $\tan\gamma = dD/dL$ et on écrit dL et dD en fonction de C_L et C_D , on obtient :

$$dT = \frac{1}{2} Z C_L \rho c dr V_R^2 \cos\beta (1 - \tan\beta \tan\gamma) \quad (8)$$

$$dQ = \frac{1}{2} r Z C_L \rho c dr V_R^2 \cos\beta (\tan\beta + \tan\gamma) \quad (9)$$

$$\eta = \frac{dT V_A}{dQ 2\pi n} = \frac{1 - \tan\beta \tan\gamma}{\tan\beta + \tan\gamma} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta + \gamma)} \quad (10)$$

Si l'hélice fonctionne dans des conditions idéales, c.-à-d. la traînée égale à zéro, le rendement de l'hélice devient 1. Contrairement au résultat obtenu par la méthode d'impulsion (actuator) qui indique que si une hélice produit une poussée supérieure à zéro, son rendement même dans des conditions idéales doit être inférieure à 1.

La raison principale de cette différence réside dans la négligence des vitesses induites, c'est-à-dire des facteurs d'écoulement a et a' .

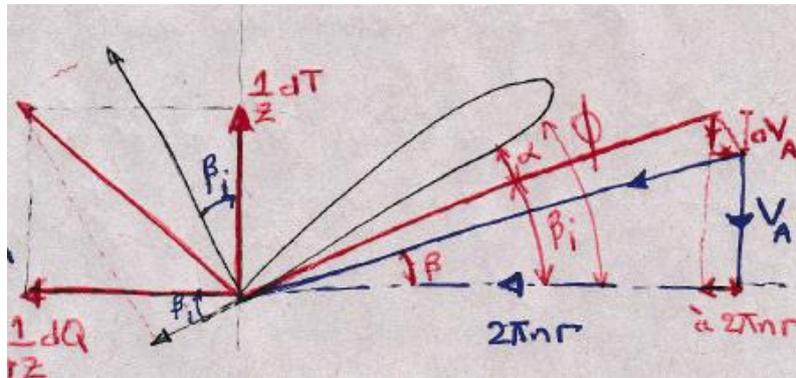


Figure 03 Forces et vitesses sur un élément de pale
 (avec les vitesses induites)

Si les vitesses induites sont prises en considération comme il est montré sur la figure 3, la poussée et le couple élémentaires sont écrites comme suit :

$$dT = \frac{1}{2} Z C_L \rho c dr V_R^2 \cos \beta_i (1 - \tan \beta_i \tan \gamma) \quad (11)$$

$$dQ = \frac{1}{2} r Z C_L \rho c dr V_R^2 \cos \beta_i (\tan \beta_i + \tan \gamma) \quad (12)$$

Donc :

$$\eta = \frac{dT V_A}{dQ 2\pi n} = \frac{1 - \tan \beta_i \tan \gamma}{\tan \beta_i + \tan \gamma} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta_i + \gamma)} \quad (13)$$

$$= \frac{\tan \beta}{\tan \beta_i} \frac{\tan \beta_i}{\tan(\beta_i + \gamma)} = \frac{1 - a'}{1 + a} \frac{\tan \beta_i}{\tan(\beta_i + \gamma)} \quad (14)$$

Avec :

$$\tan \beta = \frac{V_A}{2\pi n r} \quad , \quad \tan \beta_i = \frac{V_A(1 + a)}{2\pi n r(1 - a')} = \tan \beta \frac{1 + a}{1 - a'}$$

L'expression du rendement de l'équation (14) se compose de trois facteurs :

$\frac{1}{1 + a}$: associé avec la vitesse induite axiale

$1 - a'$: reflète à la perte due à la rotation

$\eta_f = \frac{\tan \beta_i}{\tan(\beta_i + \gamma)}$: indique l'effet de la trainée sur l'élément de la pale

$$\eta_i = \frac{1 + a}{1 - a'} \quad , \quad \eta = \eta_i \cdot \eta_f$$

Si la trainée est nulle donc $\tan \gamma = 0$ l'équation (14) devient identique à l'expression obtenue à partir de la théorie d'impulsion (actuator).

Afin de mettre en pratique la théorie de l'élément de pale, il est nécessaire de connaître C_L et C_D , a et a' pour les éléments de pale à différents rayons afin qu'on puisse déterminer dT/dr et dQ/dr et par intégration sur tout le rayon r on peut obtenir la poussée et le couple de l'hélice. C_L et C_D peuvent être obtenus à partir de données expérimentales, et a et a' l'aide de la théorie de l'impulsion.

Combinaison entre La méthode d'impulsion et la théorie de l'élément de pale :

La théorie de l'hélice a été vue avoir évolué selon deux voies bien distinctes, à savoir la théorie d'impulsion (actuator) et la théorie de l'élément de pale (BEM). Ce qui a conduit à des résultats incohérents ; par exemple, la théorie de l'élément de pale (BEM) suggère que le rendement de l'hélice tendra vers 100 % si les forces visqueuses sont réduites à zéro, alors que la théorie d'impulsion, qui est une approche non visqueuse, définit une limite spécifique de rendement qui dépend de la vitesse d'avance et le coefficient de poussée. Cette divergence a conduit à une combinaison des deux théories dans lesquelles les vitesses induites sont déterminés par la théorie d'impulsion, après l'analyse est menée par la théorie de l'élément de pale (BEM).

Dans le cas d'un nombre de pales infini, les vortex en lames hélicoïdales émanant de chaque pale sont «très proches» les uns des autres; cependant, pour le cas réel d'une hélice avec un nombre de pales défini, les tourbillons de sont séparés. Par conséquent, la vitesse moyenne induite lorsque l'on considère une ligne circumférentielle à un certain rayon r dans le disque d'hélice, est inférieur à la vitesse induite locale au niveau des pales. Un facteur de correction, k , appelé facteur de Goldstein, est introduit dans les équations (27) et (28) (voir chapitre théorie de l'actuator ou l'impulsion) :

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi\rho r V_A^2 k a(1+a) \quad (15)$$

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi\rho r^3 V_A \omega k a'(1+a) \quad (16)$$

Pour $r = xR$, avec R est le rayon de l'hélice, D le diamètre, $\omega = 2\pi n$ on :

$$\begin{aligned} dT &= \rho n^2 D^4 dK_T & dr &= R dx = \frac{D}{2} dx \\ dQ &= \rho n^2 D^5 dK_Q & J &= \frac{V_A}{nD} \end{aligned}$$

L'équation (15) et (16) deviennent :

$$4\pi\rho xR \frac{D}{2} dx V_A^2 k a(1+a) = \rho n^2 D^4 dK_T$$

$$\frac{dK_T}{dx} = \frac{2\pi\rho xR D V_A^2 k a(1+a)}{\rho n^2 D^4}$$

$$\frac{dK_T}{dx} = \pi J^2 x k a(1+a) \quad (17)$$

$$\frac{dK_Q}{dx} = \frac{1}{2} \pi^2 J x^3 k a'(1+a) \quad (18)$$

On a :

$$\eta = \frac{\frac{dT}{dr} \cdot V_A}{\frac{dQ}{dr} \cdot \omega} = \frac{2\pi J^2 x k a(1+a) \rho n^2 D^4 \cdot V_A}{\pi^2 J x^3 k a'(1+a) \rho n^2 D^5 \cdot 2\pi n}$$

$$\eta = \left(\frac{J}{\pi x}\right)^2 \frac{a}{a'} = \tan^2 \beta \frac{a}{a'} \quad (19)$$

Facteur de Goldstein κ :

Goldstein a analysé l'écoulement induit par un système de surfaces hélicoïdales à pas constant de longueur infinie. Il a obtenu une expression avec un facteur de correction κ pour un nombre de pales défini. Les graphes 4 et 5 montrent les valeurs de κ en fonction de $1/\lambda_i$ pour des hélices à nombre de pales $Z = 4$ et $Z = 5$ avec $\lambda_i = x \tan \beta_i$.

Facteurs d'écoulement axial et rotationnel d'une section :

A partir de la théorie d'impulsion (actuator), on a :

$$\eta = \tan^2 \beta \frac{a}{a'}$$

Et on a aussi à partir de la théorie de l'élément de pale (BEM) :

$$\eta = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta_i + \gamma)}$$

Pour un rendement idéal :

$$\eta_i = \frac{\tan\beta}{\tan\beta_i} = \frac{1 - a'}{1 + a} \quad (C_D = 0, \gamma = 0)$$

Donc :

$$1 + a = \frac{1 - a'}{\eta_i}$$
$$a' = 1 - \eta_i(1 + a) \quad (20)$$

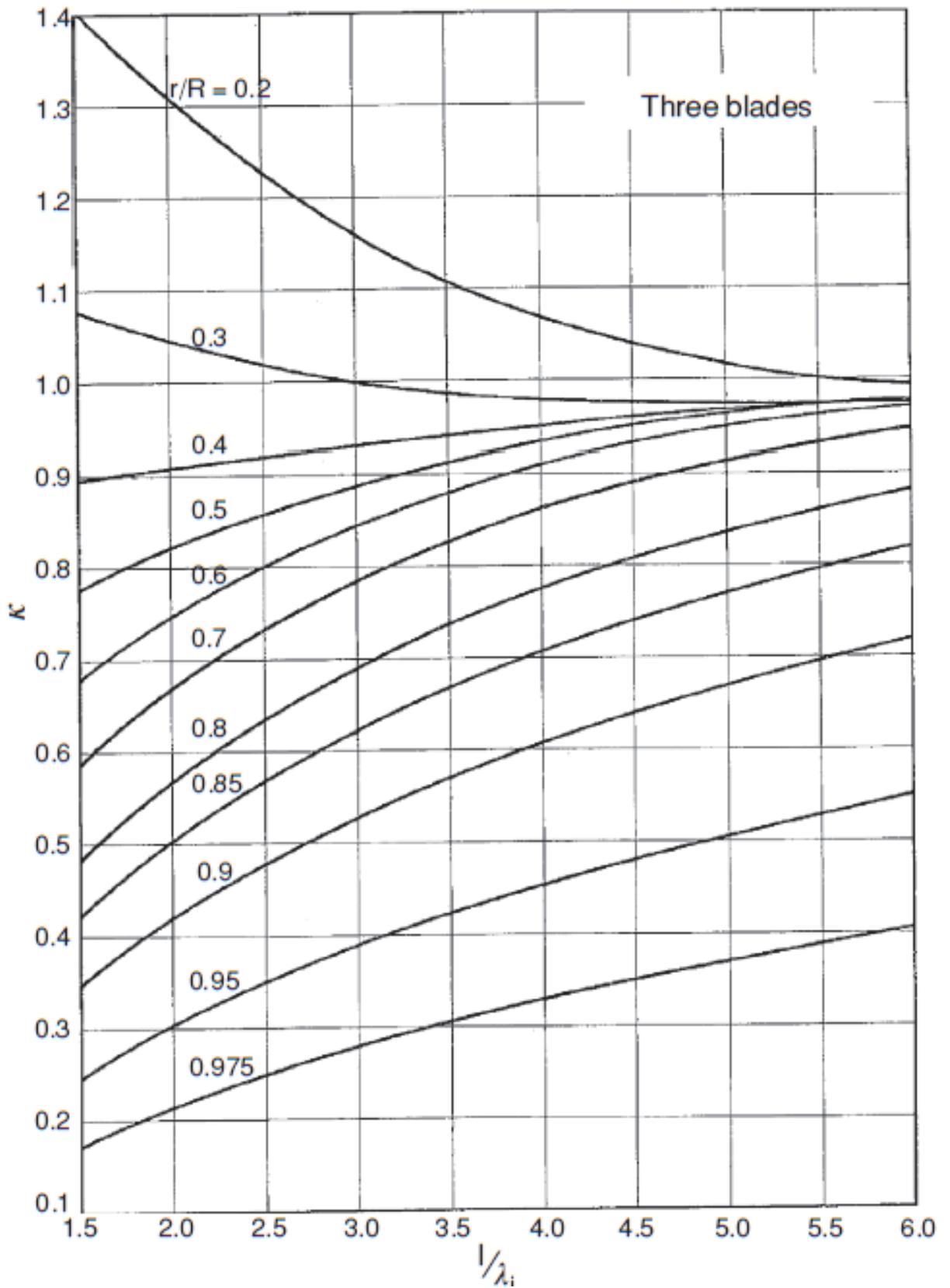


Figure 04 Facteurs de Goldstein $Z = 3$

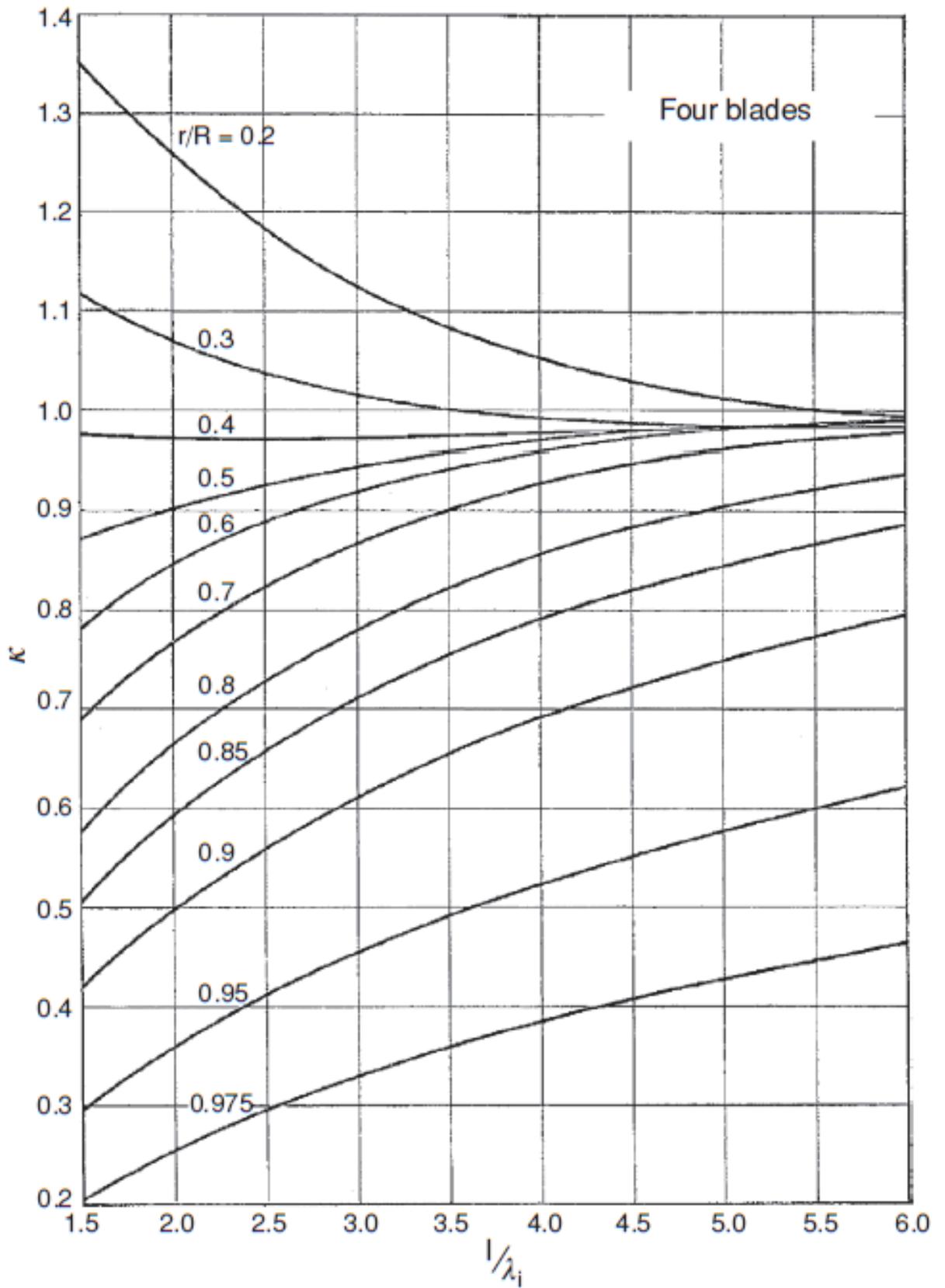


Figure 05 Facteurs de Goldstein $Z = 4$

On a aussi :

$$a' = \frac{a \tan^2 \beta}{\eta} \quad (21)$$

L'égalité des équations (20) et (21) nous donne :

$$\begin{aligned} 1 - \eta_i(1 + a) &= \frac{a \tan^2 \beta}{\eta} \\ &= 1 - \eta_i - a\eta_i \\ a \left(\eta_i + \frac{\tan^2 \beta}{\eta} \right) &= 1 - \eta_i \\ a &= \frac{1 - \eta_i}{\eta_i + \frac{\tan^2 \beta}{\eta}} \end{aligned} \quad (22)$$

La distribution radiale des facteurs d'écoulement a et a' a l'allure montrée sur la figure 6. Les valeurs de a varie entre 0,3 – 0,4 et a' entre 0,02 – 0,04.

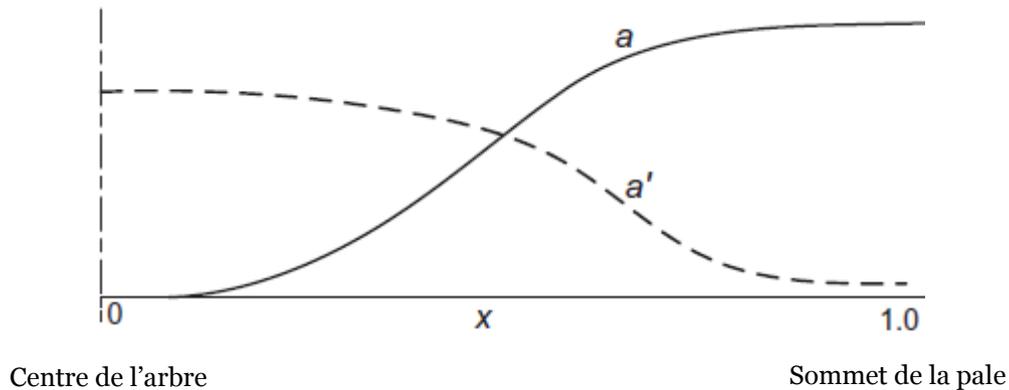


Figure 06 Distribution radiales des facteurs a et a'

Application 01 :

Une hélice ayant un de diamètre $D = 4 \text{ m}$ et une vitesse de rotation $n = 180 \text{ rpm}$ se déplace avec une vitesse d'avance 4 m/s . La poussée fournit par l'élément de la pale d'hélice à 0.7 m est de 200 kN/m . En appliquant le théorème de quantité de mouvement et en prenant en considération l'effet de rotation du fluide :

1. Représenter les pressions, les vitesses axiales, et les vitesses angulaires ?
2. Calculer Facteurs d'écoulement axial et rotationnel a et a' ?
3. Calculer le couple élémentaire ?
4. En déduire le rendement élémentaire ?

Solution :

1. Les vitesses axiales et angulaires loin devant loin derrière, juste devant et juste à l'arrière de l'hélice sont représentées dans la figure O2.

2. Calcul des facteurs d'écoulement axial et rotationnel a et a' :

On a :

$$a = \frac{v_1}{V_A}$$

$$a' = \frac{\omega_1}{\omega}$$

Donc :

$$v_1 = aV_A \quad ; \quad \omega_1 = a'\omega$$

$$v_2 = 2aV_A \quad ; \quad \omega_2 = 2a'\omega$$

On a aussi :

$$dA_0 = 2\pi r dr$$

Et :

$$dT = \rho dA_0 (V_A + v_1) v_2 = 4\pi r dr V_A^2 a(1+a) \quad (I)$$

$$dQ = \rho dA_0 (V_A + v_1) \omega_2 r^2 = 4\pi r^3 dr V_A \omega a'(1+a) \quad (II)$$

A partir de (I) :

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi r V_A^2 a(1+a) = 200$$

$$4\pi \cdot 1025 \cdot 1,4 \cdot 6^2 \cdot a(1+a) = 200$$

$$a + a^2 = 0,308 \Rightarrow a + a^2 - 0,308 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-0,308) = 2,232$$

$$a = \frac{-1 + \sqrt{2,232}}{2} = 0,247$$

$$a = 0,247$$

On a :

$$\eta = \frac{dT V_A}{dQ \omega} = \frac{4\pi r dr V_A^2 a(1+a)}{4\pi r^3 dr V_A \omega a'(1+a)} = \frac{a}{a'} \frac{V_A^2}{\omega^2 r^2} = \frac{1-a'}{1+a} \quad (III)$$

Donc :

$$a' \omega^2 r^2 (1 - a') = a(1 + a) V_A^2 \quad (IV)$$

$$(3.2\pi)^2 \cdot 1,4^2 a' (1 - a') = a(1 + a) \cdot 6^2$$

$$(6\pi)^2 \cdot 1,4^2 a' (1 - a') = 0,247 \cdot (1 + 0,247) \cdot 6^2$$

$$a' (1 - a') = 0,0159 \Rightarrow a'^2 - a' + 0,0159 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (0,0159) = 0,9364$$

$$a' = \frac{1 - \sqrt{0,9364}}{2} = 0,01619$$

$$a' = 0,01619$$

3. Calcul du couple élémentaire :

À partir de l'équation (II) on a :

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi\rho r^3 V_A \omega a' (1 + a)$$

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi \cdot 1025 \cdot 1,4^3 \cdot 6 \cdot 6\pi \cdot 0,01619 \cdot 1,247 = 80,696 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{dQ}{dr} = 80,696 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-1}$$

4. Calcul du rendement :

$$\eta = \frac{1 - a'}{1 + a} = \frac{1 - 0,01619}{1 + 0,247} = 0,7889$$

Ou bien :

$$\eta = \frac{\frac{dT}{dr} V_A}{\frac{dQ}{dr} \omega} = \frac{200 \cdot 6}{80,696 \cdot 6\pi} = 0,7889$$