Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Faculté de Chimie.
Département de génie chimique et génie des matériaux

L2-Méthodes Numériques-(2019/2020)
Solution de la fiche de TD n=°3: *Intégration numérique*

Solution exercice 04: Soit l'intégrale

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}dx$$

(1) **Calculons la valeur exacte de I_1:** On a

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}dx = \int_{-1}^{1} (2+x)^{\frac{-1}{2}}dx = \int_{-1}^{1} U'U^n dx$$

avec $U(x) = 2 + x$ et $n = \frac{1}{2}$..
Donc

$$I_1 = \frac{U^{n+1}}{n+1}]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}]_{-1}^{1} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$$

(2) **Calculons I_1 par la méthode des trapèzes simple:** c'est à dire dans le cas le nombre de subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ égal à $1 = n$.
La formule de trapèze simple s'ecrit:

$$I_{T_s} = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

avec $a = -1,\ b = 1,\ h = \frac{b-a}{n} = 2$ et $f(x) = \sqrt{2+x}$.
Ainsi

$$I_{T_s} = f(-1) + f(1) = \sqrt{3} + 1$$

Evaluation de l'erreur:

$$E_s = |I_1 - I_{T_s}| = \sqrt{3} - \frac{5}{3} \simeq 0.065338.$$

(3) **Calculons I_1 par la formule des trapézes généralisée pour $n = 2$:**
La formule des trépézes généralisée s'ecrit:

$$I_{T_g} = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

avec $x_i = a + ih,\ i = 0, \ldots, n$.
Dans notre cas $n = 2$ alors $h = \frac{b-a}{2} = 1$ et $x_1 = a + h = 0$.
Ainsi

$$I_{T_g} = \frac{1}{2}\left[f(-1) + f(1) + 2f(0)\right] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}$$

Evaluation de l'erreur:

$$E_g = |I_1 - I_{T_g}| = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{6} - \sqrt{2} \simeq 0.017196$$

On remarque que l'erreur E_g est plus petite que l'erreur E_s.

(4) **Calculons le nombre de subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ pour une erreur près de $\varepsilon = 10^{-6}$:**
On a l'erreur de la méthode des trapèzes est majorée par:

$$E_t \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Où $M_2 = \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$.
On calcule M_2: On a

$$f(x) = \sqrt{2+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}(2+x)^{-\frac{3}{2}}$$

Ainsi $|f''(x)| = \frac{1}{4}(2+x)^{-\frac{3}{2}} = g(x)$.
Pour calculer M_2 il faut étudier la monotonie de $|f''(x)| = g(x)$. On a

$$g'(x) = -\frac{3}{8}(2+x)^{-\frac{5}{2}} < 0$$

Alors $g(x)$ est décroissante. D'où

$$M_2 = g(-1) = |f''(-1)| = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \simeq 408,24$$

D'où le nombre de subdivision est $n = 409$.

Solution exercice 05: Soit l'intégrale

$$I_2 = \int_0^1 xe^{-x}dx$$

La valeur exacte de $I_2 = 1$ (on utilise l'itégration par partie pour la calculer).

(1) **Calculons I_2 par la méthode de Simpson simple:** c'est à dire dans le cas le nombre de subdivision de l'intervalle $[-1,1]$ égal à $2 = n$.
La formule de Simpson simple s'ecrit:

$$I_{S_s} = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})\right]$$

avec $a = 0,\ b = 1,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$ et $f(x) = xe^{-x}$.
Ainsi

$$I_{S_s} = \frac{1}{6}\left[f(0) + f(1) + 4f(\frac{1}{2})\right] \simeq 0.263490$$

Evaluation de l'erreur:

$$E_s = |I_1 - I_{S_s}| \simeq 0.73651$$

(2) **Calculons I_2 par la formule de Simpson généralisée pour $n = 4$:**
La formule de Simpson généralisée s'ecrit:

$$I_{S_g} = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right]$$

avec $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$.
Dans notre cas on a $n = 4$ alors $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{4}$ et

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}}$	e^{-1}

Ainsi

$$I_{S_g} = \frac{1}{12}\left[f(0) + f(1) + 4(f(x_1) + f(x_3) + 2f(x_2)\right] = 0.264192$$

Evaluation de l'erreur:

$$E_g = |I_2 - I_{S_g}| \simeq 0.735808$$

(3) **Calculons le nombre de subdivision de l'intervalle $[0,1]$ pour une erreur près de $\varepsilon = 10^{-8}$:**
On a l'erreur de la méthode de Simpson est majorée par:

$$E_t \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880 n^4}$$

Où $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$.
On calcule M_4: On a

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x-2)e^{-x} \Rightarrow f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x}$$

Ainsi

$$f^{(4)}(x) = (x-4)e^{-x} \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = (4-x)e^{-x} = h(x) \ sur \ [0,1]$$

Pour calculer M_4 il faut étudier la monotonie de $|f^{(4)}(x)| = h(x)$. On a

$$h'(x) = (x-5)e^{-x} < 0 \ sur \ [0,1]$$

Alors $h(x)$ est décroissante. D'où

$$M_4 = h(0) = |f^{(4)}(0)| = 4.$$

Ainsi

$$M_4 \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{2880\varepsilon}} \simeq 19.30$$

D'où le nombre de subdivision est $n = 20$.
Remarque le nombre de subdivision de la méthode de Simpson est toujours pair.

Solution exercice 6: On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accéleration γ

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ en m/s^2	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculons la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson:
On sait que l'acceleration γ est la dérivée de la vitesse V, donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(t)dt$$
$$V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(t)dt.$$

(1) **La méthode des trapèzes:** d'après le tableau des valeurs, on a $h = 10$ et n=8. Alors

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{2}\left[\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2\sum_{n=1}^{n-1}\gamma(t_i)\right] \\ &= 5\,[30 + 50.67 + 2(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70)] \\ &= 3089 m/s \end{aligned}$$

(2) **La méthode de Simpson:**

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3}[\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2\sum_{n=1}^{n-1}\gamma(t_{2i}) + 4\sum_{n=0}^{n-1}\gamma(t_{2i+1})] \\ &= \frac{10}{3}[30 + 50.67 + 2(33.44 + 37.75 + 43.29) \\ &+ \ 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70)] \\ &= 3087 m/s \end{aligned}$$