Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Faculté de Chimie.
Département de Génie Chimique et Département de Génie des Matériaux

L2-Méthodes Numériques-(2019/2020)
Fiche de TD n=°2 Interpolation polynomiale

Exercice 01

Soit une fonction $f(x)$ dont on connait sa valeur en certains points:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	2	36	252	1040

1) le polynôme de Lagrange passant par le 3 premiers points :
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2.$ Le polynôme est de degré ≤ 2 donné par :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i),$$

Avec :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

$$P_2(x) = 16x^2 - 14x$$

2. le polynôme de Lagrange passant par le 4 premiers points.
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2,\ x_3 = 3$ Le polynôme est de degré ≤ 3 donné par :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i),$$

Avec :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{-2}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Ainsi $P_3(x) = 25x^3 - 59x^2 + 36x$.

2) Non on ne peut pas.
3) L'expression analytique de l'erreur pour les deux polynômes :
Rappel :

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi_x \in [a,b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

avec $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

$$E_2(x) = \frac{f^{(2+1)}(\rho)}{3!} \prod_{i=0}^{2} (x - x_i), \qquad \rho \in [0,2]$$
$$E_3(x) = \frac{f^{(3+1)}(\rho)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x - x_i), \qquad \rho \in [0,3]$$

4) $f(1.5)$?
$a)$ $f(1.5) \approx P_2(1.5) = 15,$
$b)$ $f(1.5) \approx P_3(1.5) = 5.625$

Exercice 02

Soit la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$, définie aux points:

x	4	6	8	10
$f(x)$	1.59	1.817	2	2.1544

(1) Dresser la table des différences divisées puis déterminer le polynôme d'interpolation de Newton $P(x)$.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
4	1.59	$\frac{1.817 - 1.59}{6 - 4} = 0.1135$	$\frac{0.0915 - 0.1135}{8 - 4} = -0.0055$	$\frac{-0.0035 + 0.0055}{10 - 4} = 0.0003$
6	1.817	$\frac{2 - 1.817}{8 - 6} = 0.0915$	$\frac{0.0772 - 0.0915}{10 - 6} = -0.0035$	
8	2	$\frac{2.1544 - 2}{10 - 8} = 0.0772$		
10	2.1544			

Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1.59 + 0.1135(x - 4) - 0.0055(x - 4)(x - 6) + 0.0003(x - 4)(x - 6)(x - 8)$$

2) $P(9) = 2.0795$

Evaluons l'erreur :

$$E = |f(9) - P_3(9)| = \left|\sqrt[3]{9} - 2.0795\right| = 0.58 * 10^{-3}$$

Exercice 03

Si on veut interpoler la fonction $f(x) = e^{x-1}$ par un polynône de degré 12 en utilisant 13 nœuds dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P(x)|$.

Rappel :

$$\forall x \in [a,b]: \quad |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\prod_{i=0}^{n} |(x - x_i)|}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Ou encore

$$\forall x \in [a,b]: \quad |f(x) - P_n(x)| \leq |\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}| \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

N=12

$$M_{13} = sup_{\xi \in [-1,1]} \left| f^{(13)}(\xi) \right| = 1$$

Pour $x \in [a,b], |x - x_i| \leq |b - a| \Longrightarrow \prod_{i=0}^{12} |x - x_i| \leq (b-a)^{13} = 2^{13}$

D'où $|E| \leq \frac{1}{13!} 2^{13}.1 \leq 1.31 * 10^{-6}$.