Université des sciences et de la technologie Mohammed Boudiaf d'Oran
Faculté de Génie Mécanique
2ème année LMD

TD N°5 : Résistance des Matériaux

Exercice N°1 : Soit une poutre *ABCD* simplement appuyée aux points *B* et *C* (Figure 1). Cette poutre est exposée à une charge uniformément répartie *q* sur toute la longueur *AD*. Pour quel rapport *b/L*, le moment de flexion est nul au centre de la poutre.

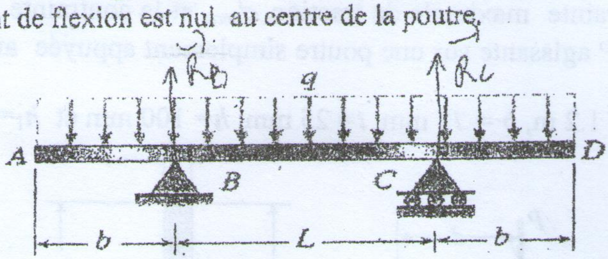


Figure 1

Exercice N°2 : Selon la figure 2, une poutre de longueur *L* simplement appuyée aux deux extrémités *A* et *B* est soumise à une charge concentrée *P* à $x = L/3$ du point *A* et un moment $M_1 = PL/4$ à $x = L/3$ du point *B*. Tracer les diagrammes du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

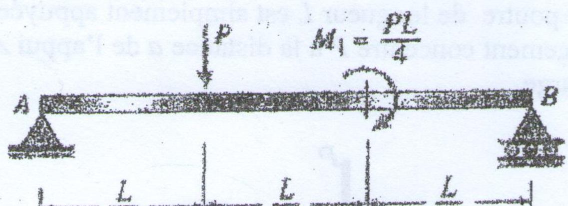


Figure 2

Exercice N°3 : Soit une poutre encastrée-libre (Porte-à-faux) représentée par la figure 3. Cette poutre supporte une charge concentrée $P = 3kN$ à $x = 0.8\ m$ de l'extrémité encastrée et une charge uniformément répartie $q = 1.0\ kN/m$ sur une distance de 1.6 m du point B. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant de cette poutre.

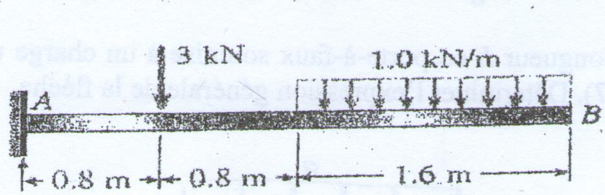


Figure 3

Exercice N°4 : Une poutre *ABCD* de section circulaire de diamètre *d= 80 mm*, simplement appuyée aux points *B* et *C* qui sont espacées d'une distance *L = 600 mm.* A une distance *b= 200 mm* à gauche et à droite des deux appuis *B* et *C*, deux forces d'intensité *P= 47 kN* pour chacune sont appliquées dans la direction transversale (figure 4). Calculer la contrainte maximale de flexion σ_{max}.

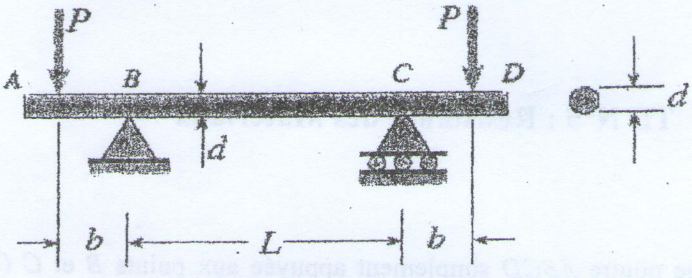


Figure 4

Exercice N°5 : Déterminer la contrainte maximale de traction σ^{t}_{max} et la contrainte maximale de compression σ^{c}_{max} dues à la charge *P* agissante sur une poutre simplement appuyée aux points *A et B* (figure 5).
On donne : P=5.4 kN, L= 3.0 m, d = 1.2 m, b = 75 mm, t= 25 mm, h= 100 mm et h_1= 75 mm.

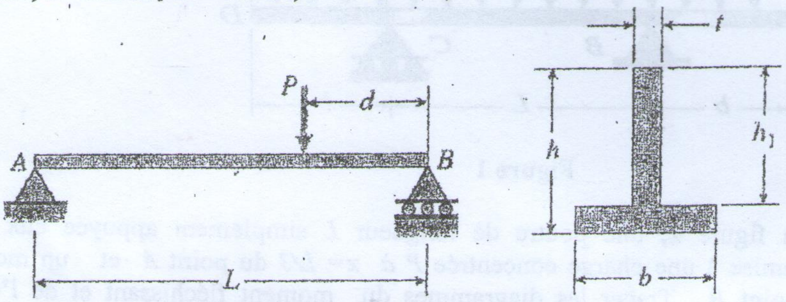


Figure 5

Exercice N°6 : Selon la figure 6, une poutre de longueur *L* est simplement appuyée aux points *A* et *B*. Cette poutre est exposée à un chargement concentré *P* à la distance *a* de l'appui *A*. Déterminer la flèche au point d'application de la charge.

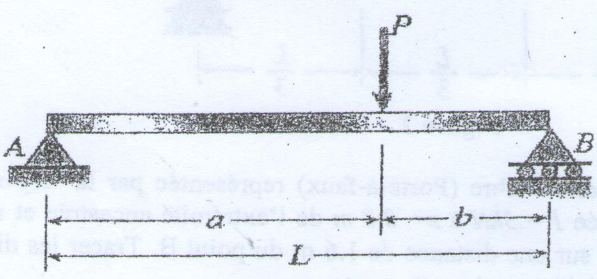


Figure 6

Exercice N°7 : Soit une poutre de longueur *L* en porte-à-faux soumise à un charge uniformément répartie *q* sur le tronçon *BC* (Figure 7). Déterminer l'expression générale de la flèche.

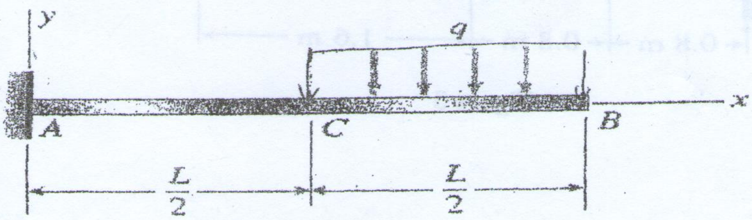
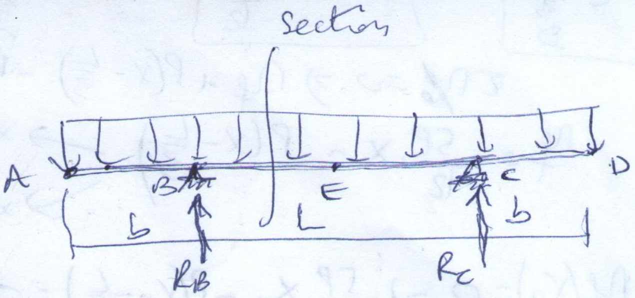


Figure 7

Solution TD N°5 . RDM

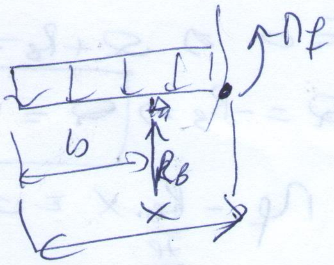
EX1 | Poutre en équilibre :



$\begin{cases}\Sigma F = 0 \\ \Sigma M = 0\end{cases}$ | par raison de symétrie ⇒

$$R_B = R_C = \frac{q(2b+L)}{2} = q\left(b+\frac{L}{2}\right)$$

Dans la section : $\Sigma M/_o = 0$



$$M_f + qx.\left(\frac{x}{2}\right) - R_B(x-b) = 0$$

$$M_f = -q\frac{x^2}{2} + R_B(x-b)$$

$$\boxed{M_f = -q\frac{x^2}{2} + q\left(b+\frac{L}{2}\right)(x-b)}$$

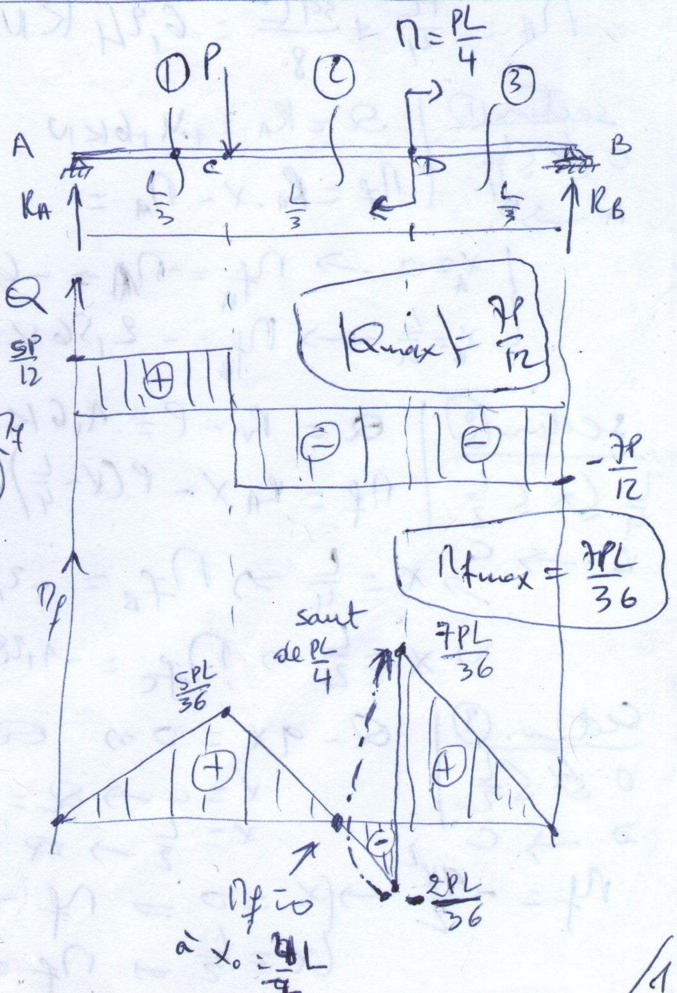
Au milieu de la poutre au pt E ⇒ $\left(x_E = b+\frac{L}{2}\right)$ si le moment $M_f = 0$

$$M_f(x_E) = -q\frac{x_E^2}{2} + q\left(b+\frac{L}{2}\right)(x_E-b) = 0$$

$$-\frac{q}{2}\left(b+\frac{L}{2}\right)^2 + q\left(b+\frac{L}{2}\right)\left(b+\frac{L}{2}-b\right) = 0 \Rightarrow$$

$$b = \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{L} = \frac{1}{2}}$$

EX2 | Poutre en équilibre :



$\Sigma M = 0 \Rightarrow \Sigma M/_B = 0 \Rightarrow$

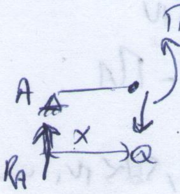
$$R_A.L - P.\frac{2L}{3} + \frac{PL}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5P}{12}}$$

$\Sigma M/_A = 0 \Rightarrow$

$$R_B.L - \frac{PL}{4} - \frac{PL}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{7P}{12}}$$

section ① $0 \leq x \leq \frac{L}{3}$ (A C) | $\Sigma F = 0 \Rightarrow Q - R_A = 0$

$Q = R_A \Rightarrow \boxed{Q = \frac{5P}{12}}$



$\Sigma M/_o = 0 \Rightarrow M_f - R_A.x = 0$

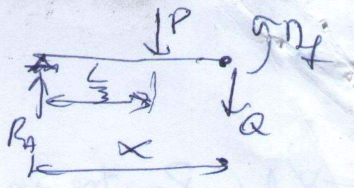
$$M_f = R_A.x \Rightarrow M_f = \frac{5P}{12}.x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_f = 0 \\ x = \frac{L}{3} \rightarrow M_f = \frac{5PL}{36}\end{cases}$$

section 2 | $\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3}$ | C D

$\Sigma F = 0 \Rightarrow Q + P - R_A = 0$

$$\boxed{Q = -\frac{7P}{12}}$$



$\Sigma M = 0 \Rightarrow M_f + P\left(x - \frac{L}{3}\right) - \underset{\frac{5P}{12}}{R_A} . x = 0$

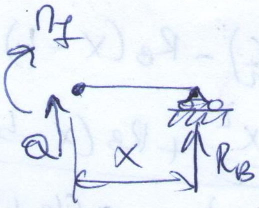
$M_f = \frac{5P}{12} . x - P\left(x - \frac{L}{3}\right)$ → $x = \frac{L}{3} \Rightarrow M_f = \frac{5}{36} PL$; → $x = \frac{2L}{3} \Rightarrow M_f = -\frac{2}{36} PL$ } ⇒ M_f change de signe ⇒ passe par 0.

$M_f(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{5P}{12} x_0 - P\left(x_0 - \frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{4}{7} L}$

section 3 | $0 \leq x \leq \frac{L}{3}$ | B D

$\Sigma F = 0 \Rightarrow Q + R_B = 0$

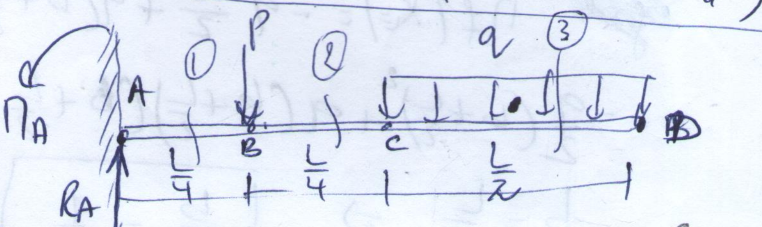
$Q = -R_B \Rightarrow \boxed{Q = -\frac{7P}{12}}$



$\Sigma M/ = 0 \Rightarrow M_f - \underset{\frac{7P}{12}}{R_B} . x = 0$

$M_f = \frac{7P}{12} x$ → $x = 0 \Rightarrow M_f = 0$; → $x = \frac{L}{3} \Rightarrow M_f = \frac{7PL}{36}$ (M_f fait un saut de $\frac{PL}{4}$ dû à la présence de $M = \frac{PL}{4}$)

EX3 | Poutre en équilibre ⇒

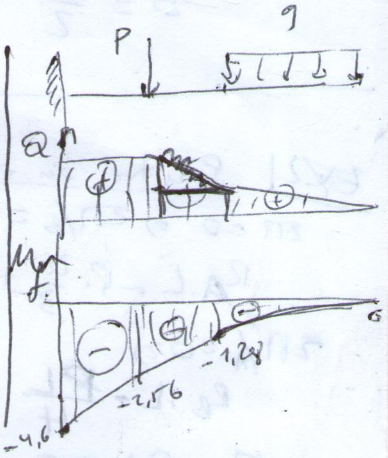


$\Sigma F = 0 \Rightarrow R_A - P - \frac{qL}{2} = 0$

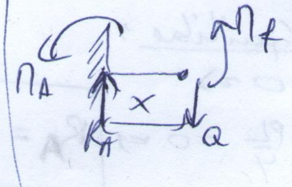
$R_A = P + \frac{qL}{2} = 3 + 1{,}6 = 4{,}6\ KN$

$\Sigma M/_A = 0 \Rightarrow M_A - \frac{PL}{4} - \frac{qL}{2}\left(\frac{L}{4} + \frac{L}{4} + \frac{L}{4}\right) = 0$

$M_A = \frac{PL}{4} + \frac{3qL^2}{8} = 6{,}24\ KN.m$



section 1 | $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$ | A → B



$Q = R_A = +4{,}6\ KN$

$M_f = R_A . x - M_A =$

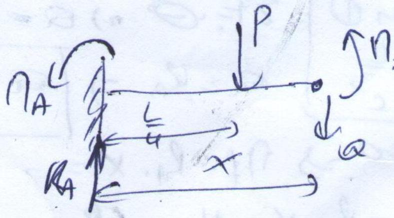
$x_A = 0 \rightarrow M_{f_A} = -M_A = -6{,}24\ KN.m$

$x_B = \frac{L}{4} \rightarrow M_{f_B} = -2{,}56\ KN.m$

section 2 | $\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}$ | B → C

$Q = R_A - P = 1{,}6\ KN$

$M_f = R_A x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) - M_A$



$x = \frac{L}{4} \rightarrow M_{f_B} = -2{,}56\ KN.m$

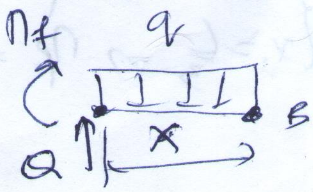
$x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{f_C} = -1{,}28\ KN.m$

Section 3 | $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ | D → C

$Q - qx = 0 \Rightarrow Q = qx$

$x = 0 \rightarrow Q = 0$

$x = \frac{L}{2} \rightarrow Q = \frac{qL}{2} = 1{,}6\ KN$



$M_f = -\frac{qx^2}{2}$ → $x = 0 \Rightarrow M_f = 0$; $x = \frac{L}{2} \Rightarrow M_f = -\frac{qL^2}{8} = -1{,}28\ KN.m$

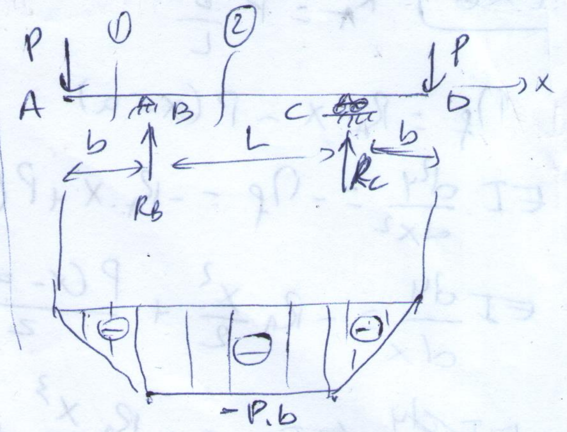
tracer les diagrammes

EX4 | $\Sigma M/_{C} = 0$, $\Sigma M/_{B} = 0$

(ou par symétrie) $\Rightarrow$

$R_B = R_C = P$

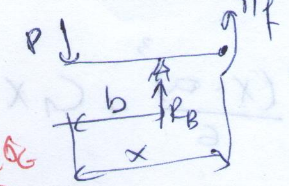
Section ① $0 \leq x \leq b$ | $M_f = -Px$ $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_{f_A} = 0 \\ x = b \Rightarrow M_{f_B} = -P.b \end{cases}$



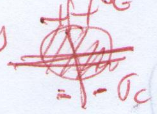
Section ② $b \leq x \leq b+L$ | $M_f = -P.x + R_B(x-b)$

$M_f = -Px + P(x-b)$

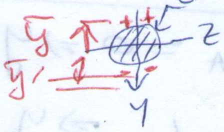
$M_f = -Pb = cste$



$\boxed{M_{f_{max}} = -P.b}$ $<0 \Rightarrow$



Section circulaire



$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$

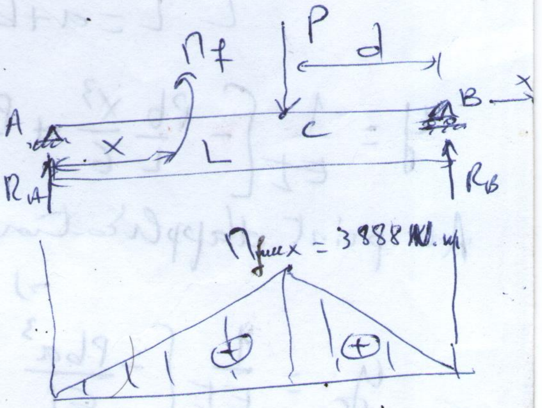
$$\sigma_{f_{max}} = \frac{M_{f_{max}}}{I_z}\left(\pm \frac{d}{2}\right) = \pm \frac{P.b}{\frac{\pi d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = \pm \frac{32 P.b}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{f_{max}} = \begin{cases} \sigma^t = + \frac{32Pb}{\pi d^3} = 187\,MPa \\ \sigma^c = - \frac{32Pb}{\pi d^3} = -187\,MPa \end{cases}$$

EX5 | $\Sigma M/_B = 0 \Rightarrow R_A = P\frac{d}{L} = 5{,}4 \times \frac{1{,}2}{3} = 2{,}16\,KN$

$M_f = R_A.x$ $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_{f_A} = 0 \\ x = L-d \Rightarrow M_{f_C} = R_A(L-d) \end{cases}$

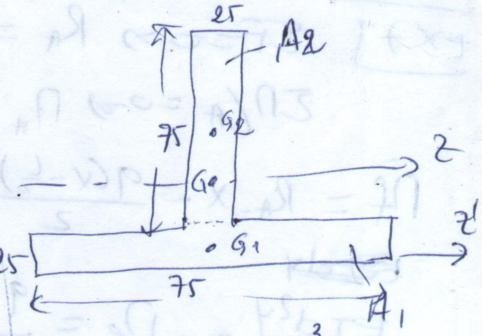
$M_{f_{max}} = M_{f_C} = 2{,}16 \times (3 - 1{,}2) = 3{,}888\,KN.mm = 3888\,N.mm$



$A_1 = 25 \times 75 \rightarrow y_{G_1} = 12{,}5$

$A_2 = 75 \times 25 \rightarrow y_{G_2} = 62{,}5$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i y_{G_i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{A_1 y_{G_1} + A_2 y_{G_2}}{A_1 + A_2} \Rightarrow y_G = 37{,}5\,mm$$



$$I_z = \sum_{i=1}^{2}\left(I_{G_i} + (y_{G_i} - y_G)^2 A_i\right)$$

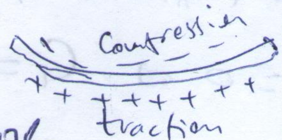
$$I_z = \left[I_{G_1} + (y_{G_1} - y_G)^2 A_1\right] + \left[I_{G_2} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2\right]$$

$I_z = 3{,}32 \cdot 10^6\,mm^4$

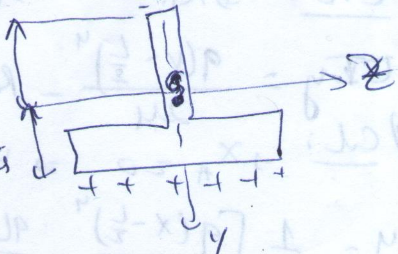
$I_{G_1} = \frac{75 \times 25^3}{12}$

$I_{G_2} = \frac{25 \times 75^3}{12}$

$M_{max} = 3888\,N.mm > 0 \Rightarrow$



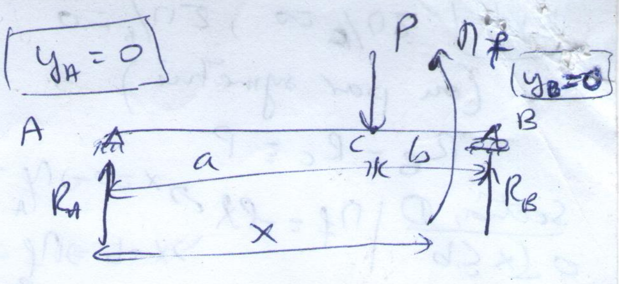
$\sigma^t_{max} = \frac{M_{max}}{I_z} \cdot y_G = \text{-----} = +49\,MPa$



$\sigma^c_{max} = \frac{M_{max}}{I_z} y'_G = \text{-----} = -73\,MPa$

EX6 $R_A = P.\frac{b}{L}$

$\boxed{y_A = 0}$ $\boxed{y_B = 0}$



$$M_f = R_A.x - P(x-a)$$

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -M_f = -R_A.x + P(x-a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -R_A\frac{x^2}{2} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1$$

$$\cancel{EI\frac{dy}{d}}\ EIy = -R_A\frac{x^3}{6} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_1x + C_2$$

conditions aux Limites:

1) $x_A = 0 \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

2) $x_B = L \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow -R_A\frac{L^3}{6} + \frac{Pb^3}{6} + C_1.L = 0$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2) \\ L = a+b \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{Pb}{6L}(a^2 + 2ab)}$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{L}\frac{x^3}{6} + \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pb}{6L}(a^2+2ab)x\right]$$

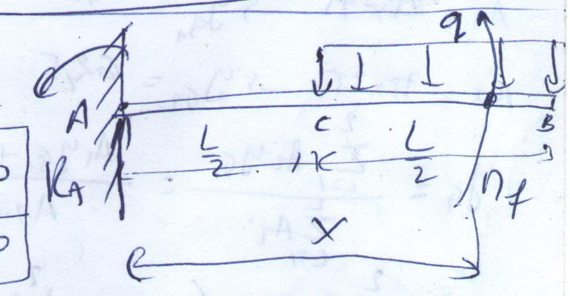
Au point d'application de la force $\Rightarrow x_C = a$
$\Rightarrow$ pt C

$$y_C = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pba^3}{6L} + \frac{Pb}{6L}(a^2+2ab).a\right] \Rightarrow \boxed{y_C = \frac{2Pa^2b^2}{6EIL}}$$

EX7 $\Sigma F = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qL}{2}$

$\Sigma M/_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{3qL^2}{8}$

$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)_A = 0}$ $\boxed{y_A = 0}$



$$M_f = R_A.x - \frac{q(x-\frac{L}{2})^2}{2} - M_A$$

~~EIdy~~

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_f = \frac{q(x-\frac{L}{2})^2}{2} - R_A.x + M_A$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{q(x-\frac{L}{2})^3}{6} - R_A\frac{x^2}{2} + M_A.x + C_1$$

1) C.L: $\Rightarrow x_A = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$EIy = \frac{q(x-\frac{L}{2})^4}{24} - R_A\frac{x^3}{6} + M_A\frac{x^2}{2} + C_2$$

2) C.L: $\Rightarrow x_A = 0 \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{q(x-\frac{L}{2})^4}{24} - \frac{qL}{2}\frac{x^3}{6} + \frac{3qL^2}{8}\frac{x^2}{2}\right] = \frac{q}{48EI}\left\{2(x-\frac{L}{2})^4 - 4Lx^3 + 9L^2x^2\right\}$$

à $x = L \Rightarrow y_{max}$ (au pt B)

$$y_{max_B} = \frac{41qL^4}{384EI}$$