Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

KHALDI Nassima

6 juin 2020

Table des matières

0.1 introduction

L'objective de ce chapitre est de résoudre numériquement des systèmes linéaires de la forme

$$AX = b \qquad (S)$$

avec A est une matrice carée d'ordre $n \times n$, X et b sont des vecteurs colonnes à n composantes.
On note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On cherche le vecteur X qui verifie le système (S).
Le théorème suivant nous donne l'existance et l'unicité de la solution X du système (S) :

Théorème 0.1.1 *Soit $A = (a_{ij})_{ij}$ une matrice carée d'ordre $n \times n$. Si $\det A \neq 0$ alors le système (S) admet une solution unique telle que*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}; \quad i = 1, \ldots, n$$

où A_i sont determiné par la méthode de Gramer.

Remarque 0.1.2 *On remarque que si $n > 4$, alors les méthodes classiques deviennent très lentes en temps d'execution. Par exemple pour $n = 10$, la méthode de Gramer exige 3×10^9 opérations.*

Dans ce chapitre, on applique quelques méthodes numériques ayant des temps de calcul acceptables et de nombre d'opérations d'ordre n^3 pour $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On a deux méthodes : méthodes directes et méthodes itératives.

0.2 Méthodes directres

Les méthodes directes sont utilisées généralenment lorsque $n \leq 100$ et si A est une matrice pleine (pas beaucoup de 0).

Cas particulier : Si A est une matrice triangulaire supèrieure alors le système (S) est :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On a $\det A = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

D'où

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0; \quad i = 1, \ldots, n$$

Le vecteur X s'obtient facilement par une remontée :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j] \\ \vdots \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j] \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Remarque 0.2.1 *On résoud d'une manière similaire un système triangulaire inferieur par une décente.*

0.2.1 Méthode de Gauss

Le principe de cette méthode est de transformer la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ à une matrice triangulaire supèrieure c'est à dire triangulariser le système (S).
En effet, on pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$.
Soit le système (S') suivant :

$$(S') \begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \to L_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \to L_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \to L_n^{(1)} \end{cases}$$

où $L_i^{(1)}$ désigne les lignes du système (S'), $i = 1, \ldots, n$.

Pour triangulariser le système (S') on suit les étapes suivantes :
Etape 1 : Si $a_{11} \neq 0$ on na change pas la première ligne.
Pour $i = 2, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$, on fait

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$

On obtient

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \\ a_{2j}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{ij}^{(1)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)} \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Si $a_{11} = 0$, alors on cherche $a_{k1}^{(1)} \neq 0$, $k = 2, \ldots, n$. Puis on permute les lignes $L_1^{(1)}$ et $L_k^{(1)}$.

Etape p : pour $i = 1, \ldots, p-1$, on a

$$L_i^{(p)} \leftarrow L_i^{(p-1)}$$

et pour $i = p, \ldots, n$, on a

$$L_i^{(p)} \leftarrow L_i^{(p-1)} - \frac{a_{i(p-1)}^{(p-1)}}{a_{(p-1)(p-1)}^{(p-1)}} L_{p-1}^{(p-1)}$$

Finalement, à l'étape $n-1$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution du (S) est

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}[b_1^{(1)} - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{(1)} x_j] \\ \vdots \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}}[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j] \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_{nn}^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \end{cases}$$

On détermine x_n puis x_{n-1} ainsi de suite jusqu'à obtotion x_1.
Les coefficients $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n)}$ sont appelés respectivement le 1^{er} pivot, 2^{me} pivot, $\ldots$ n^{me} pivot.

Remarque 0.2.2 *La méthode de Gauss nous permet de calculer le determinant de la matrice A tel que :*

$$\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i)}$$

où p est le nombre de permutation des lignes.
De plus, cette méthode nécessite $\frac{2}{3}n^3$ d'opérations pour un système d'ordre n.

Exemple 0.2.3 *Soit le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - +2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow AX = b \quad \textit{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :
Etape 1 : $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$ *et*
$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_3^{(1)} - L_1^{(1)}$. *Alors*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} L_2^{(2)} = L_3^{(2)} - \frac{2}{3} L_2^{(2)}$. *Alors*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi $x_3 = 1$ $x_2 = -1$ *et* $x_1 = 0$.
De plus,

$$\det A = 1 \times (-3) \times \frac{5}{3} = -5$$

0.2.2 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan ressemble à la méthode de Gauss sauf qu'elle aboutit directement à une matrice identité.
En effet,
Etape 1 : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait

$$L_1^{(2)} \leftarrow \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$$

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(2)} \quad pour \quad i = 2, \ldots, n$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Si $a_{22}^{(2)} \neq 0$ on fait

$$L_2^{(3)} \leftarrow \frac{1}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)}$$

$$L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - a_{i2}^{(2)} L_2^{(3)} \quad i = 1, \ldots, n \quad avec \quad i \neq 2$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & \cdots & a_{1n}^{(3)} & b_1^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2n}^{(3)} & b_2^{(3)} \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

Etape n : Si $a_{nn}^{(n)} \neq 0$ on fait

$$L_n^{(n+1)} \leftarrow \frac{1}{a_{nn}^{(n)}} L_n^{(n)}$$

$$L_i^{(n+1)} \leftarrow L_i^{(n)} - a_{in}^{(n)} L_n^{(n+1)} \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad avec \quad i \neq 2$$

Donc

$$(S) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2^{(n)} \\ & 0 & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

D'où la solution du système (S) est

$$x_i = b_i^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Exemple 0.2.4 *Soit le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - +2x_3 = 3 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Etape 1 : $L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$ *et*
$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_3^{(1)} - L_1^{(1)}$. *Donc*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} - \frac{1}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)} = L_1^{(1)} + \frac{1}{3} L_2^{(2)}$ *et*
$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_3^{(1)} - L_1^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 3 :$L_2^{(3)} \leftarrow -\frac{1}{3} L_2^{(2)}$ *après on fait et*
$L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} + 2L_2^{(3)}$
en suite $L_2^{(3)} \leftarrow 5L_2^{(3)} + L_3^{(3)}$. *On obtient*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Etape 4 *:* $L_3^{(4)} \leftarrow \frac{3}{5} L_3^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution est $x_1 = 0$*,* $x_2 = -1$ *et* $x_3 = 1$*.*

0.3 Méthode itétatives

Lorsque n est très grand, on résout le système $AX = b$ d'ordre n par les méthdes itératives. La dimension de la matrice A peut atteindre 10^5.
Ces méthodes ont une grande stabilité relativement aux erreurs d'arrondis.

Définition 0.3.1 *On appelle méthode itérative de résolution d'un système* $AX = b$ *une méthode qui construit une suite* $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la solution du système* $AX = b$*.*
La suite $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est calculée à partir de vecteur donné* $X^{(0)}$*.*

Le principe des méthodes itératives consiste à mettre le système $AX = b$ sous la forme

$$X = BX + C, \quad X, C \in \mathbb{R}^n, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

puis créer la suite $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $X^{(0)}$ donné tele que

$$X^{(n)} = BX^{(n-1)} + C$$

.
On décompose la matrice A sous la forme

$$A = M - N$$

avec M est une matrice inversible. Ainsi

$$AX = b \Leftrightarrow (M - N)X = b \Leftrightarrow MX = NX + B$$

Alors

$$X^{(n+1)} = M^{-1}NX^{(n)} + M^{-1}b$$

Pour déterminer la matrice M et N on va utiliser deux méthodes.

0.3.1 Méthode de Jacobie

On pose $A = M - N$ avec M est la matrice diagonal

$$M = D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et $N = L + U$ avec

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n\ n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & -a_{n-1\ n} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$AX = b \Leftrightarrow DX - (L+U)x = b \Leftrightarrow DX = (L+U)X + b$$

D'où

$$X^{(n+1)} = D^{-1}(L+U)X^{(n)} + D^{-1}b$$

On note $B_j = D^{-1}(L+U)$ la matrice de Jacobie et $C = D^{-1}b$.

Algorithme de Jacobie :

$$\begin{cases} X^{(0)} & \textit{donné} \\ x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{(n)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{(n)} \right] & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

0.3.2 Méthode de Gauss-Seidel

Dans cette méthode, on pose $M = D - L$ et $N = -U$ avec $(D - L)$ est inversible. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow (D-L)X = UX + b \Leftrightarrow x = (D-L)^{-1}UX + (D-L)^{-1}b$$

Donc

$$X^{(n)} = (D-L)^{-1}UX^{(n-1)} + (D-L)^{-1}b$$

On note $B_{GS} = (D-L)^{-1}UX$ la matrice de Gauss-Seidel et $C = (D-L)^{-1}b$.

Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} X^{(0)} & \textit{donné} \\ x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij} x_j^{(n)} \right] & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Remarques 0.3.2
1. *La méthode de Gauss-Seidel converge rapidement par rapport à la méthode de Jacobie.*
2. *Pour appliquer la méthode de Jacobie ou la méthode de Gauss-Seidel il faut que :* $\forall i, \quad a_{ii} \neq 0$.

Exemple 0.3.3 *Soit le système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - +2x_3 = 3 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons la matrice de Jacobie : *On a*

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 0.3.4 *Les éléments diagonaux de la matrice de Jacobie sont toujours nuls.*

Soit $X^{(0)} = (0,1,0)^t$. *Alors*

$$X^{(1)} = B_J X^{(0)} + D^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$X^{(2)} = B_J X^{(1)} + D^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons la matrice de Gauss-Seidel : *On a*

$$B_{GS} = (D-L)^{-1} U$$

avec

$$D-L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$(D-L)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où

$$B_{GS}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 0.3.5 *La première colonne de la matrice Gauss-Seidel est toujours nulle.*

Soit $X^{(0)}=(0,1,0)^t$. *Alors*

$$X^{(1)}=B_{GS}X^{(0)}+(D-L)^{-1}b=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)}=B_{GS}X^{(1)}+(D-L)^{-1}b=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$X^{(2)}=(-\frac{23}{2},-\frac{47}{2},-\frac{29}{2})^t$$