3.3 Equations aux valeurs propres. Observables :

3.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur :

3.3.1.1 Définition :

Si un opérateur A agit sur un ket $|\psi\rangle$ et le transforme de sorte que

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \qquad (3.44)$$

λ étant un scalaire, alors on dit que :

λ est valeur propre de A et $|\psi\rangle$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A

L'équation (3.44) est appelée équation aux valeurs propres.

Remarque :

Soit $|\psi\rangle$ un ket propre d'un opérateur A associé à la valeur propre λ et soit $|\psi'\rangle$ un ket proportionnel à $|\psi\rangle$. C'est à dire $|\psi'\rangle = \alpha|\psi\rangle$ tel que α est un nombre complexe quelconque. On se propose de calculer l'action de A sur $|\psi'\rangle$. On a :

$$A|\psi'\rangle = A\alpha|\psi\rangle = \alpha A|\psi\rangle = \alpha\lambda|\psi\rangle = \lambda\alpha|\psi\rangle = \lambda|\psi'\rangle \qquad (3.45)$$

On rappelle que la place des nombres α et λ n'a pas d'importance. On peut les mettre là où on veut.

On a montré que :

Si un ket $|\psi\rangle$ est vecteur propre d'un opérateur A associé à la valeur propre λ, alors tout ket proportionnel à $|\psi\rangle$ ($|\psi'\rangle = \alpha|\psi\rangle$, α étant un nombre quelconque) est aussi vecteur propre de A associé à la même valeur propre.

La valeur propre λ est dite non dégénérée s'il lui correspond un seul vecteur propre (à un facteur multiplicatif près). Autrement dit, si la valeur propre λ est non dégénérée il lui correspond un espace vectoriel propre à une dimension.

λ est dite 'g fois dégénérée' s'il lui correspond g vecteurs propres linéairement indépendants.

3.3.1.2 Equation caractéristique :

Soit $|\psi\rangle$ un vecteur propre d'un opérateur A associé à la valeur propre λ. Supposons que $|\psi\rangle$ se développe sur une base $\{|u_i\rangle\}$ de la manière suivante :

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \qquad (3.46)$$

En multipliant les deux termes de l'équation aux valeurs propres (eq(3.44)) à gauche par le bra $\langle u_i|$, on trouve :

$$\langle u_i|A|\psi\rangle = \langle u_i|\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle u_i|\psi\rangle$$

En introduisant la relation de fermeture (eq(3.27)),

$$\langle u_i|A[\sum_k |u_k\rangle\langle u_k|]|\psi\rangle = \lambda c_i$$

$$\sum_k \langle u_i|A|u_k\rangle\langle u_k|\psi\rangle = \lambda c_i$$

$$\sum_k A_{ik} c_k = \lambda c_i$$

Qui s'écrit encore,

$$\sum_k A_{ik} c_k = \sum_k \lambda \delta_{ik} c_k$$

$$\sum_k (A_{ik} - \lambda\delta_{ik}) c_k = 0 \qquad (3.47)$$

On obtient un système d'équations linéaires (3.47) qui n'a de solution non triviale que si le déterminant de la matrice associée est nul, c'est-à-dire :

$$Det(A - \lambda \mathrm{I}_d) = 0 \qquad (3.48)$$

L'équation (3.48) s'appelle 'équation caractéristique'. Sa résolution nous permet de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.

3.3.1.3 Exemples d'application :

Exemple1 : Soit un système physique dont l'espace des états est à deux dimensions. $\{|u_i\rangle\}$, $i = 1,2$ est une base orthonormée de cet espace dans laquelle un opérateur σ_y a la représentation matricielle suivante :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

On résoud l'équation caractéristique :

$$Det(\sigma_y - \lambda \mathrm{I}_d) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

Le spectre de σ_y est $\{-1,1\}$

Soit $|\varphi_1\rangle$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$:

On pose $|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\sigma_y |\varphi_1\rangle = -|\varphi_1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -iy \\ ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow y = -ix$$

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel propre est un espace à une dimension engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

En mécanique quantique on choisit un vecteur normé, alors on impose $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1$

$$\begin{pmatrix} x^* & ix^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 2|x|^2 = 1 \Rightarrow |x|^2 = \frac{1}{2}$$

Si on choisit x réel et positif, alors $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Son développement sur la base est :

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

Soit $|\varphi_2\rangle$ le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$

On pose $|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\sigma_y|\varphi_2\rangle = |\varphi_2\rangle$

$\begin{pmatrix} -iy \\ ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow y = ix$

$|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Comme dans le cas précédent on obtient un sous espace vectoriel à une dimension engendré cette fois-ci par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. On impose la relation de normalisation $\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 1$

$\begin{pmatrix} x^* & -ix^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |x|^2 = \frac{1}{2}$

Si on choisit x réel et positif on trouve $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Et son développement sur la base est

$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$

Exemple2 : Soit un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions. $\{|u_i\rangle\}$, $i = 1,3$ est une base orthonormée de cet espace dans laquelle un opérateur B a la représentation matricielle suivante :

$B = b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

On résoud l'équation caractéristique :

$Det(B - \lambda \mathrm{I}_d) = 0$

$$\begin{vmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & b \\ 0 & b & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b-\lambda)(\lambda^2 - b^2) = 0$$

On trouve : $\lambda_1 = -b$ qui est non dégénérée car son ordre de multiplicité est égal à 1.

$\lambda_2 = b$ qui est deux fois dégénérée car son ordre de multiplicité est égal à 2.

Soit $|\varphi_1\rangle$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -b$:

On pose $|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$B|\varphi_1\rangle = -b|\varphi_1\rangle$$

$$b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow b\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = -b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0$ et $z = -y$

$$|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -b$ est à 1 dimension. En imposant la relation de normalisation $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & y^* & -y^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |y|^2 = \frac{1}{2}$$

Si on choisit y réel et positif on trouve $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Et son développement sur la base est

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

On calcule maintenant l'espace vectoriel propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = b$:

On pose $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$B|\varphi\rangle = b|\varphi\rangle$$

$$b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow b\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; z = y$$

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = b$ est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants ils forment une base dans le sous espace vectoriel propre. Celui-ci est donc à deux dimensions. Ce résultat était prévisible puisque λ_2 est une racine de l'équation caractéristique d'ordre de multiplicité 2. Elle est donc deux fois dégénérée et il lui correspond deux vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres et aussi vecteur propre, on obtient un espace vectoriel propre à deux dimensions. On rappelle qu'en mécanique quantique on choisit une base orthonormée. En imposant la relation $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$,

on écrit : $\begin{pmatrix} x^* & y^* & y^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow |x|^2 + 2|y|^2 = 1$

Les deux vecteurs qu'on choisira devront donc vérifier la relation de normalisation ci-dessus.

On choisira par exemple $y = 0$ pour le premier vecteur ce qui donne $x = 1$

$$|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\varphi_2\rangle$ étant choisi, on imposera à $|\varphi_3\rangle$ de lui être orthogonal

$$\langle \varphi_2 | \varphi_3 \rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Tenant compte de la relation de normalisation et en choisissant y réel et positif on trouve

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $|\varphi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Le développement des vecteurs propres sur la base est

$$|\varphi_2\rangle = |u_1\rangle$$

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

3.3.2 Observable :

Un opérateur est une observable si les deux conditions suivantes sont réunies :

- Il est hermitique
- Il est possible de former une base dans l'espace des états avec ses vecteurs propres.

Remarque :

On admet les propriétés suivantes :

1-Les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles.

2-Deux vecteurs propres correspondants à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux. Deux vecteurs propres associés à la même valeur propre peuvent être choisis orthogonaux.

Par conséquent, les vecteurs propres d'un opérateur hermitique forment un système orthonormé. Si cet opérateur est une observable, alors ce système est en plus complet et donc il peut servir de base pour étudier un système physique.

3.3.3 Ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC):

3.3.3.1 Définition :

Soit un ensemble d'observables qui commutent deux à deux. On peut choisir une base formée par les vecteurs propres communs à ces observables. Si cette base est unique, alors on dit que cet ensemble est un Ensemble Complet d'Observables qui Commutent (ECOC).

3.3.3.2 Exemple d'application :

Soit un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions. $\{|u_i\rangle\}, i = 1,3$ est une base orthonormée de cet espace dans laquelle deux observables H et A ont les représentations matricielles suivantes :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Où ω_0 et a sont des constantes réelles.

1-Vérifier que H et A sont hermitiques.

2-Montrer que H et A commutent. Que peut-on déduire ?

3-Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de H et A. En déduire une base de vecteurs propres communs à H et A.

4-Parmi les ensembles d'opérateurs suivants : $\{H\}, \{A\}$, $\{H, A\}$, $\{H^2, A\}$ lesquels forment un ECOC ?

Solution :

1-Lorsqu'une matrice représentant un opérateur est symétrique et réelle, cet opérateur est forcément hermitique. C'est le cas des deux matrices qui représentent H et A.

2-On vérifie facilement que H et A commutent en faisant le produit matriciel. On trouve :

$$HA = AH = \hbar\omega_0 a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit qu'il est possible de former une base dans l'espace des états , formée par les vecteurs propres communs à ces deux observables.

3-La matrice représentant H est diagonale, donc les valeurs propres de H sont les éléments de la diagonale et les vecteurs propres sont les vecteurs de base.

$\lambda_1 = \hbar\omega_0$, non dégénérée $\rightarrow |u_1\rangle$

$\lambda_2 = -\hbar\omega_0$, deux fois dégénérée $\rightarrow |u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur A ont déjà été calculés (voir l'exemple2 de la section 3.3.1.3). On avait trouvé :

$$\lambda_1 = -a \rightarrow |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

$$\lambda_2 = a \rightarrow \begin{cases} |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle \\ |\varphi_3\rangle = |u_1\rangle \end{cases}$$

On cherche la base commune :

On a directement

$|\varphi_3\rangle = |u_1\rangle$ donc $|\varphi_3\rangle$ est commun à H et A

On remarque que :

$|\varphi_1\rangle$ est une combinaison linéaire de $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$ qui sont vecteurs propres de H avec la même valeur propre $\lambda_2 = -\hbar\omega_0$. Donc, il appartient à l'espace vectoriel propre de dimension 2, associé à la valeur propre λ_2 qui est 2 fois dégénérée. Par conséquent, $|\varphi_1\rangle$ est aussi vecteur propre de H avec la même valeur propre $\lambda_2 = -\hbar\omega_0$. Ce raisonnement s'applique aussi à $|\varphi_3\rangle$.

En conclusion, l'ensemble des trois vecteurs $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ constitue une base de vecteurs propres communs à H et A.

4- H à lui seul forme-t-il un ECOC ?

$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ sont vecteurs propres de H et ils forment une base dans l'espace des états. Mais cette base n'est pas unique. Ceci provient du fait que λ_2 est dégénérée. Il lui correspond deux vecteurs propres linéairement indépendants et par suite, toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres est aussi vecteur propre avec cette même valeur propre. On peut donc avoir une infinité de bases. Comme exemple on peut citer $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$

En conséquence, $\{H\}$ n'est pas un ECOC.

De même, $\{A\}$ n'est pas un ECOC car $\lambda_2 = a$ est deux fois dégénérée.

$\{H, A\}$ est-il un ECOC ? Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Base commune	H	A
$\left\|\varphi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_2\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_3\right\rangle$	$-\hbar\omega_0$	$-a$
$\left\|\varphi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_2\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_3\right\rangle$	$-\hbar\omega_0$	a
$\left\|\varphi_3\right\rangle = \left\|u_1\right\rangle$	$\hbar\omega_0$	a

Toute combinaison linéaire de $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ donnerait un vecteur propre de H, mais il ne serait pas vecteur propre de A car $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ sont associés à des valeurs propres différentes de A. De même, toute combinaison linéaire de $|\varphi_2\rangle$ et $|\varphi_3\rangle$ donnerait un vecteur propre de A, mais il ne serait pas vecteur propre de H car $|\varphi_2\rangle$ et $|\varphi_3\rangle$ sont associés à des valeurs propres différentes de H. En somme, la base unique $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ est unique et par conséquent

$\{H, A\}$ est un ECOC.

$\{H^2, A\}$ est-il un ECOC ?

Base commune	H^2	A
$\left\|\varphi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_2\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_3\right\rangle$	$\hbar^2\omega_0{}^2$	$-a$
$\left\|\varphi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_2\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_3\right\rangle$	$\hbar^2\omega_0{}^2$	a
$\left\|\varphi_3\right\rangle = \left\|u_1\right\rangle$	$\hbar^2\omega_0{}^2$	a

Toute combinaison linéaire de $|\varphi_2\rangle$ et $|\varphi_3\rangle$ donnerait un vecteur propre à la fois de H^2 et de A. Cette base commune n'est pas unique et $\{H^2, A\}$ n'est donc pas un ECOC.

3.4 Les représentations $\{|x\rangle\}$ et $\{|p\rangle\}$:

On rappelle les fonctions qui forment des bases continues dans l'ensemble des fonctions d'onde.

Il s'agit de $\xi_x(x') = \delta(x'-x)$, la fonction de Dirac centrée en x

Et $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$, l'onde plane centrée en p. Ici, p est en fait p_x. Nous avions ôté l'indice x car nous nous sommes limités à une dimension.

$\xi_x(x') \to |x\rangle$

Et donc $\{\xi_x(x')\} \to \{|x\rangle\}$, et comme $\{\xi_x(x')\}$ forme une base dans F , $\{|x\rangle\}$ forme une base dans l'espace des états. Cette base dans ε est appelée représentation $\{|x\rangle\}$.

De même, $v_p(x) \to |p\rangle$

Donc, $\{v_p(x)\} \to \{|p\rangle\}$, et comme $\{v_p(x)\}$ forme une base dans F , $\{|p\rangle\}$ forme une base dans l'espace des états. Cette base dans ε est appelée représentation $\{|p\rangle\}$.

Pour calculer les composantes d'un ket $|\psi\rangle$ sur le vecteur de base $|x\rangle$ il suffit de calculer le produit scalaire de $|\psi\rangle$ par $|x\rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle x|\psi\rangle = \int dx'\,\xi_x^{\ *}(x')\psi(x')$$

$$= \int dx'\delta(x'-x)\psi(x') = \psi(x) \qquad (3.49)$$

Et les composantes de $|\psi\rangle$ sur $|p\rangle$:

$$\langle p|\psi\rangle = \int dx v_p^{\ *}(x)\psi(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x) = \overline{\psi}(p) \qquad (3.50)$$

3.5 Les observables X et P_x :

3.5.1 Définition de X :

On définit X comme étant un opérateur qui agit sur un ket $|\psi\rangle$ et le transforme en $|\psi'\rangle = X|\psi\rangle$ tel que $\psi'(x) = x\psi(x)$.

La relation ci- dessus s'écrit :

$$\langle x|\psi'\rangle = x\langle x|\psi\rangle$$

$$\langle x|X|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle \qquad (3.51)$$

En représentation $\{|x\rangle\}$, l'opérateur X coïncide avec 'multiplication par x '

3.5.2 Définition de P_x :

On définit P_x comme étant un opérateur qui agit sur un ket $|\psi\rangle$ et le transforme en $|\psi'\rangle = P_x|\psi\rangle$ tel que $\overline{\psi}'(p) = p_x\overline{\psi}(p)$.

$\langle p|\psi'\rangle = p_x\langle p|\psi\rangle$

$\langle p|P_x|\psi\rangle = p_x\langle p|\psi\rangle$ (3.52)

En représentation $\{|p\rangle\}$, l'opérateur P_x coïncide avec 'multiplication par p_x '

Très souvent, on travaille en représentation $\{|x\rangle\}$. On a donc besoin de connaitre l'action de P_x dans ce cas, autrement dit,

Si P_x agit sur $|\psi\rangle$ et le transforme en $|\psi'\rangle = P_x|\psi\rangle$, on sait que $\overline{\psi}'(p) = p_x\overline{\psi}(p)$, mais quelle est la relation entre $\psi'(x)$ et $\psi(x)$? On sait que :

$$\psi'(x) = \langle x|\psi'\rangle$$

$$= \langle x|P_x|\psi\rangle$$

$$= \langle x|(\int dp|p\rangle\langle p|)P_x|\psi\rangle$$

$$= \int dp\langle x|p\rangle\langle p|P_x|\psi\rangle$$

$$= \int dp v_p(x) p_x\overline{\psi}(p)$$

$$= \int dp v_p(x) p\overline{\psi}(p)$$ (car dans notre cas $p \equiv p_x$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} p\overline{\psi}(p) \qquad (3.53)$$

On rappelle l'équation (3.13):

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} \overline{\psi}(p)$$

En comparant les deux expressions (3.13) et (3.53) précédentes, on déduit que,

$$\psi'(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) \qquad (3.54)$$

Qui s'écrit encore : $\langle x|P_x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\psi\rangle$ (3.55)

Conclusion : En représentation $\{|x\rangle\}$, P_x coïncide avec 'dérivation par rapport à x ensuite, multiplication par $-i\hbar$'.