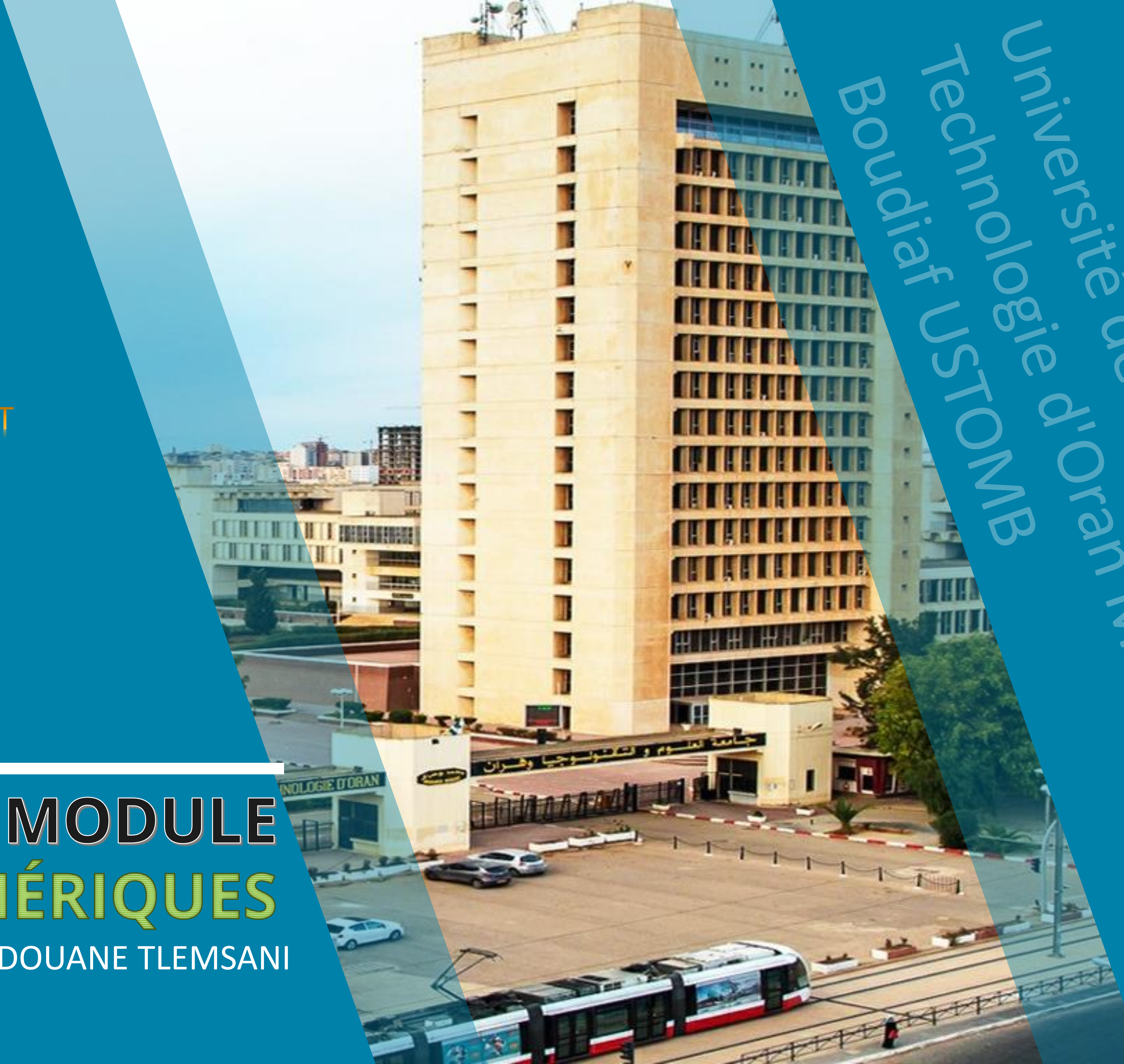
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf USTOMB

Cours

Licence L2

MODULE

MÉTHODES NUMÉRIQUES

DR. REDOUANE TLEMSANI

1

MÉTHODES DIRECTES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Introduction

Dans la pratique scientifique, l'ingénieur se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélisent les divers éléments considérés. Ainsi, la détermination de :

- Contraintes et déplacement des structures mécaniques chargées
- Courant et tension des réseaux électriques
- Débits de chaleur dans des réseaux de chauffage
- Solution optimale en programmation linéaire …

Certains de ces problèmes nécessitent la résolution d'un système de quelques milliers d'équations.

Introduction

Exemple : $\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 5 \\ 9x + 6y + 7z = 8 \\ 2x + 5y - 6z = 9 \end{cases}$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un système de *n* équations à *n* inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Que l'on note aussi : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = \overline{1, n}$

Ou encore : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ou $Ax=b$

Méthodes de résolution

Il existe deux types de méthodes pour la résolution d'un système $Ax=b$:

1. **Méthodes directes :** une méthode directe conduit à une solution en un nombre fini d'étapes, et s'il n'y a pas des erreurs d'arrondi, la solution serait celle du système.
2. **Méthodes itératives :** une méthode itérative fait passer d'un estimé $x^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $x^{(k+1)}$ de cette solution.

En effet, il n'existe pas de règle définitive pour le choix entre méthodes directes ou indirectes.

Cependant, les méthodes itératives sont rarement utilisées pour des systèmes à matrice pleine de faible dimension (n<100). Les méthodes itératives sont généralement préférées pour les systèmes de grande taille (l'accumulation des erreurs devient moins cruciale dans ce cas).

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Résolution des systèmes triangulaires

Définition

L ∈ $R^{n\times n}$ est Une ***matrice triangulaire inférieure*** comporte uniquement des zéros dans la partie au-dessus de la diagonale ($\forall i < j$, $l_{ij} = 0$)

L *est donc de la forme :*

$$L = \begin{pmatrix} X & & & & \\ X & X & & & \\ X & X & X & & \\ X & X & X & X & \\ X & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss

1

La méthode de Gauss engendre un algorithme fini exact dont l'idée est de transformer le système initial en un système triangulaire (inférieur ou supérieur).

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

La méthode d'élimination de Gauss

Procédure de l'élimination

Pour une élimination **sans permutation** de lignes, on passe de A à la matrice échelonnée équivalente U comme suit:

1) Colonne 1 : utiliser la première équation pour générer des zéros sous le premier pivot.
2) Colonne 2 : utiliser la nouvelle équation pour générer des zéros sous le deuxième pivot.
3) Colonne 3 à n : continuer pour trouver les n pivots de la matrice échelonnée U.

Remarque1: *Le pivot d'une ligne est le premier élément* ***non nul*** *de cette ligne.*

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

La méthode d'élimination de Gauss

Remarque 2:

Pour transformer un système quelconque en un système triangulaire, il est possible d'utiliser trois opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A. C'est la base de la méthode d'élimination de Gauss. Ces opérations sont

- ✓ La multiplication d'une ligne par un scalaire $(l_i \leftarrow \lambda l_i)$: Remplacer la ligne *i* par un multiple d'elle-même.
- ✓ La permutation des lignes $(l_i \leftarrow l_j)$: Intervertir la ligne i et la ligne j
- ✓ La somme des lignes $(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$: Remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j.

Remarque 3: Des trois opérations élémentaires, seule l'opération $(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$ n'a pas d'effet sur le déterminant. La permutation de deux lignes en change le signe, tandis que la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce même scalaire.

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

résolution des systèmes triangulaires

Remarque 4: La méthode de Gauss permet de calculer le déterminant de la matrice A, et ceci en utilisant:

$$\det A = (-1)^p \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)},$$

où p est le nombre de permutations, a_{kk} est les éléments de la diagonale de la matrice triangulaire obtenue en utilisant la méthode d'élimination de Gauss

Résolution d'un système triangulaire

On donne ici l'algorithme de résolution d'un système triangulaire inférieur. Il se fait en "remontant" les équations de la dernière ligne à la première.

L'algorithme de résolution est :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \quad pour\ i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Soit à résoudre, le système suivant (n=3) :

$$\boldsymbol{S1}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \left(E_1^{(1)}\right) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \left(E_2^{(1)}\right) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \left(E_3^{(1)}\right) \end{cases}$$

On élimine le terme $a_{21}x_1$ dans $\left(E_2^{(1)}\right)$

en prenant $E_2^{(2)} = E_2^{(1)} - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1^{(1)}$

De même, on élimine le terme $a_{31}x_1$ dans $\left(E_3^{(1)}\right)$

en prenant $E_3^{(2)} = E_3^{(1)} - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1^{(1)}$

On obtient ainsi le système :

$$\boldsymbol{S2}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \left(E_1^{(1)}\right) \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{32}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} & \left(E_2^{(2)}\right) \\ a_{23}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} & \left(E_3^{(2)}\right) \end{cases}$$

Avec : $\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \\ b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \end{cases}$ $i = 2,3 \;\; et \;\; j = 2,3$

Méthode de Gauss

$$
S2: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (E_1^{(1)}) \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{32}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} & (E_2^{(2)}) \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} & (E_3^{(2)}) \end{cases}
\Rightarrow
S3: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \left(E_1^{(1)}\right) \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} & \left(E_2^{(2)}\right) \\ a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)} & \left(E_3^{(3)}\right) \end{cases}
$$

En supposant que $a_{22} \neq 0$, on élimine de la même façon le terme $a_{32}^{(2)}x_2$ grâce à la combinaison $E_3^{(3)} = E_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}E_2^{(2)}$ et on obtient un nouveau système équivalent au système initial :

Avec : $\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}a_{23}^{(2)} \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}b_2^{(2)} \end{cases}$

Le système S3 est triangulaire supérieur.

Exemple :

Méthode de Gauss

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \quad x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - \quad x_3 = 1 \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Ax=b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Exemple 1 :

Méthode de Gauss

On a le pivot $a_{11}^{(1)} \neq 0$, on peut donc faire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle 2\rangle & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left[A^{(1)}|b^{(1)}\right] \qquad \rightarrow \qquad \left[A^{(2)}|b^{(2)}\right]$$

Le pivot $a_{22}^{(2)} \neq 0$, on peut donc faire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \langle -2\rangle & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

$$\left[A^{(2)}|b^{(2)}\right] \qquad \rightarrow \qquad \left[A^{(3)}|b^{(3)}\right]$$

En remplaçant dans le système d'équations, on a :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & -2x_2 & -x_3 & = & -7 \\ & & -5x_3 & = & -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{array}\right.$$

Exemple 2 d'entrainement

Transformation de A en une matrice triangulaire supérieure

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ 3x + 3y - 5z = 14 \\ 4x + 5y - 2z = 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Notation : $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array}\right]$

1^{er} pivot : $\boxed{2}$
$2^{ème}$ ligne - $1^{ère}$ ligne $*$ $3/2$
$3^{ème}$ ligne - $1^{ère}$ ligne $*$ 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$2^{ème}$ pivot : $\boxed{3/2}$
$3^{ème}$ ligne - $2^{ème}$ ligne $*$ 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]$$

La méthode d'élimination de Gauss

Exemple 3

Première étape pivot $a_{11}=1\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L2' = L2 - \frac{2}{1} L1 \\ L3' = L3 - \frac{3}{1} L1 \\ L4' = L4 - \frac{1}{1} L1 \end{matrix}$$

On obtient

Deuxième étape pivot $a'_{22}=1\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L3'' = \frac{1}{2}(L'3 - \frac{-4}{1} L'2) \\ L4'' = L'4 - \frac{1}{1} L'2 \end{matrix}$$

On obtient

Troisième étape pivot $a''_{33}=2\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad L4''' = 2(L''4 - \frac{-1}{2} L'2)$$

On obtient le système triangulaire augmenté

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Algorithme de Gauss

1ère étape : Triangularisation : $[A, b] \rightarrow [U, b']$

```
Pour k=1 à n-1 faire
  Pour i=k+1 à n faire
```

$$w = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

```
   Pour j=k+1 à n+1 faire
```

$$a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{kj}$$

```
   Fin pour
  Fin pour
Fin pour
```

2ème étape : Résolution du système : ***Ux=b'***

```
Pour i=n à 1 faire
```

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

```
Fin pour
```

Rappel

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthodes directes

- Méthode d'élimination de Gauss
- Méthode de décomposition L. U
- Méthode de Cholesky

Méthodes itératives

- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Seidel
- Méthode de Relaxation

Méthode de décomposition

LU LowUp

2

La factorisation **LU** d'une matrice $A_{n,n}$ est une astuce très importante dans le domaine de l'analyse numérique.

Sa base est très simple, mais ses applications sont très nombreuses et très utiles.

Principe

Méthode de décomposition LU

Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme A=L.U où L est une matrice triangulaire unitaire inférieur et U est une matrice triangulaire supérieure.

Le système devient :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \ \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

La résolution du système *Ax=b* revient à résoudre les deux systèmes *Ly=b* et *Ux=y*. Puisque L et U sont triangulaires, la résolution est immédiate.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Principe

Méthode de décomposition LU

La meilleure façon d'obtenir cette factorisation, est d'utiliser l'élimination de Gauss. Ainsi, la matrice U est la matrice finale après élimination de Gauss $A^{(n)}$.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Il reste à trouver la matrice L (triangulaire inférieure unitaire).

Principe

Méthode de décomposition LU

En effet, les différentes étapes de la **triangularisation** peuvent s'écrire sous forme matricielle. Si on pose $A = A^{(0)}$, la matrice $A^{(1)}$ du second système est obtenue en multipliant à gauche par :

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = E^{(1)} A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

De la même façon, $A^{(2)}$ obtenue en multipliant $A^{(1)}$ et $E^{(2)}$:

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = E^{(2)} A^{(2)} = E^{(2)} E^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^{(0)} = \left(E^{(2)} E^{(1)}\right)^{-1} A^{(2)} = \left(E^{(1)}\right)^{-1} \left(E^{(2)}\right)^{-1} A^{(2)}$. Les matrices $E^{(i)}$ sont inversibles car leurs déterminants sont égaux à 1 et leurs inverses sont faciles à calculer.

Principe

Méthode de décomposition LU

En effet, on peut vérifier qu'on les obtient en transformant les termes sous la diagonale en leurs opposants. On a donc :

$$L = \left(E^{(1)}\right)^{-1}\left(E^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}}{a_{22}} & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, on a : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ avec $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

Exemple

Décomposition

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}; ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 2$ u_{12}=-1 $u_{13} = 2$

$l_{21}u_{11}$=-6 → $l_{21} = -3$

$l_{21}u_{12} + u_{22}$=0 → u_{22}=-3

$l_{21}u_{13} + u_{23} = -2$ → u_{23}=4

$l_{31}u_{11}$=8 → l_{31}=4

$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$ =-1 → $l_{32} = -1$

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$=5 → u_{33}=1

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Résolution

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix};\ ;\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ -3y_1 + y_2 = 2 \\ 4y_1 - y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 5 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

$$Ux = y \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ -3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

Exemple 2

Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss : la factorisation LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

A = L * U

En appliquant l'élimination de Gauss sur A

1ère étape on élimine la deuxième et la troisième ligne de la première colonne:
Pivot = 1

Exemple 2

Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss : la factorisation LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2' = R_2 - (4/1)R_1 \\ R_3' = R_3 - (3/1)R_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$2^{ère}$ étape on élimine la troisième ligne de la deuxième colonne: Pivot = -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3'' = R_{3'} - (-2)R'_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est la matrice triangulaire supérieure U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss : la factorisation LU

Les paramètres de L, on les obtient en transformant les termes sous la diagonale. On a donc :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}}{a_{22}} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice L est la matrice triangulaire inférieure à diagonale unitaire (diagonale =1)

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

L_{21}=4 est obtenu de l'équation $R_2'=R_2-(4/1)R_1$

L_{31}=4 est obtenu de l'équation $R_3'=R_2-(3/1)R_1$

L_{32}=-2 est obtenu de l'équation $R_3''=R'_3-(-2)R_1$

Algorithme de factorisation **LU**

Début

$u_{11} = a_{11}$

Pour j=2 **à** n **faire**

$u_{1j} = a_{1j}$

$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{a_{11}}$

Fin pour

Pour i=2 **à** n-1 **faire**

$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}$

Pour j=i+1 **à** n **faire**

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right]$

Fin pour

Fin pour

$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

Fin

Utilité de la factorisation LU

On remarque facilement que la méthode LU nécessite plus de calcul et d'espace mémoire que la méthode de résolution de Gauss. En effet, la méthode de Gauss est en quelque sorte une partie de la méthode LU (construction de la matrice U).

Cependant, il ne faut pas douter de l'utilité de la méthode de factorisation LU.

Dans plusieurs situations en analyse numérique, il y a plusieurs systèmes du type Ax_i=b_i à résoudre pour i=1,…,M avec M très grand. Puisque la matrice A est constante pour tous ses systèmes, il est donc avantageux de calculer une fois L et U et résoudre les deux systèmes triangulaires à chaque fois, ce qui revient plus facile à faire.

MERCI

POUR VOTRE ATTENTION