الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريــــــة الديمقراطيــــــة الشعبيــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحــــث العلــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Djilali
BOUTCHICHA

Représentation mathématique de mouvement harmonique simple

Exercice 1.

Dans un moteur, un piston oscille avec un mouvement harmonique simple de sorte que sa position varie en fonction de l'expression

$$x = (5.00\ cm)\cos(2t + \pi/6),$$

où x est en centimètres et t est en secondes. A $t = 0$, trouver (a) la position du piston, (b) sa vitesse, et (c) son accélération. (d) Trouver la période et l'amplitude du mouvement.

a) $x = (5.00\ cm)\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0,$ $x = (5.00\ cm)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.33\ cm$

b) $v = \frac{dx}{dt} = -(10.0\ cm)\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0,$ $v = -500\ cm/s$

c) $a = \frac{dv}{dt} = -(20.0\ cm)\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0,$ $a = -17.3\ cm/s^2.$

d) $A = 5.00\ cm$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Exercice 2.

La position d'une particule est donnée par l'expression

$$x = (4.00\ m)\cos(3.00\pi t + \pi),$$

où x est en mètres et t est en secondes. Déterminer (a) la fréquence et la période du mouvement, (b) l'amplitude du mouvement, (c) la constante de phase, et (d) la position de la particule à $t = 0.250\ s$.

$x = (4.00\ m)\cos(3\pi t + \pi)$ en comparent avec $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ on trouve

a) $\omega = 2\pi f = 3\pi \quad ou\ bien \quad f = 1.50\ hz \quad et\ \ T = \frac{1}{f} = 0.667\ s$

b) $A = 4.00\ m$

c) $\varphi = \pi\ rad$

d) $x(t = 0.250\ s) = (4.00\ m)\cos(3\pi \times 0.250 + \pi) = 2.83\ m.$

Exercice 3.

Une particule se déplaçant le long de l'axe x dans un mouvement harmonique simple à partir de sa position d'équilibre, à l'origine, à $t = 0$ et se déplace vers la droite. L'amplitude de son mouvement est $2.00\ cm$, et la fréquence est de $1.50\ Hz$. (a) Montrer que la position de la particule est donnée par

$$x = (2.00\ cm)\sin 3.00\pi t$$

Déterminer (b) la vitesse maximale et le premier temps ($t > 0$) à laquelle la particule possède cette vitesse, (c) l'accélération maximale et le premier temps ($t > 0$) à laquelle la particule possède cette accélération, et (d) la distance totale parcourue entre $t = 0$ et $t = 1.00\ s$.

Djilali
BOUTCHICHA

a) Equation de la position

$A\ t = 0\ , x = 0$ et v est positive (vers la droite).

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$x(0) = A\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = +\dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$v(t) = -A\sin(\omega t + \varphi)$

Choix de la phase qui correspond à la vitesse positive

$$v(0) = -A\sin(\varphi) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin(\varphi) < 0 \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2} = +1 \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\left[\cos\omega t\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\omega t\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = A\sin\omega t$$

donc

$x(t) = A\sin\omega t$ et $v = A\cos\omega t$

Comme $A = 2cm$ et $f = 1.50\ Hz$; $\omega = 2\pi f = 3\pi\ rad/s$;

$x(t) = (2.00\ cm)\sin 3.00\pi t$

b) La vitesse maximale

$v_{max} = v_0 = \omega A = 3.00\pi \times 2.00 = 6.00\pi\ cm/s = 18.8\ cm/s$

$v = 6.00\pi\cos 3.00\pi t$

La particule possède cette vitesse à :

$t = 0$ et en suite à $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{3}s$

c) L'accélération maximale

$a_{max} = \omega^2 A = (3.00\pi)^2 \times 2.00 = 18.0\pi^2 cm/s^2 = 178\ cm/s^2$

Cette valeur positive d'accélération se produit pour la première fois à $t = \frac{3T}{4} = 0.50\ s$

Puisque $T = \frac{2}{3}\ s$ et $A = 2.00\ cm$, la particule parcourra 8.00 cm en ce temps.

Par conséquent, en 1 $s(= \frac{3}{2}T)$, la particule parcourra $8.00\ cm + 4.00\ cm$

Djilali
BOUTCHICHA

Exercice 4.

La position, la vitesse et l'accélération initiales d'un objet se déplaçant dans un mouvement harmonique simple sont x_0, v_0, et a_0; la fréquence angulaire d'oscillation est '.

(a) Montrer que la position et la vitesse de l'objet à n'importe quels instants peuvent être écrites comme

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$$
$$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

(b) Si l'amplitude du mouvement est A, montrer que

$$v^2 - ax = {v_0}^2 - a_0 x_0 = \omega^2 A^2$$

La solution proposée est $\quad x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$

Implique la vitesse $\quad v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$

et l'accélération $\quad a(t) = -\omega^2 x_0 \cos \omega t - \omega^2 \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$

$$a(t) = -\omega^2 \left(x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t \right) = -\omega^2 x(t)$$

a) L'accélération étant une position fois une constante négative signifie que nous avons un mouvement harmonique simple, et sa fréquence angulaire est ω. À $t = 0$, les équations se réduisent à $x = x_0$ et $v = v_0$ afin de satisfaire toutes les exigences.

b) $v^2 - ax = (-\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 - (-\omega^2 x_0 \cos \omega t - \omega v_0 \sin \omega t)\left(x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t\right)$

$$v^2 - ax = \omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t - 2\omega x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t + x_0^2 \cos^2 \omega t + \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t$$
$$+ \omega x_0 v_0 \cos \omega t \sin \omega t + \omega x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \sin^2 \omega t = x_0^2 \omega^2 + {v_0}^2$$

Cette expression est donc constante dans le temps. D'une part, il doit conserver sa valeur d'origine $v_0^2 - a_0 x_0$. Par contre, si on l'évalue à un tournant où $v = 0$ et $x = A$, c'est $A^2 \omega^2 + 0^2 = A^2 \omega^2$. C'est donc prouvé.

Exercice 5.

Un piston dans un moteur à essence est en mouvement harmonique simple. Si les extrêmes de sa position par rapport à son centre sont et $\pm 5.00\ cm$, trouver la vitesse et l'accélération maximales du piston lorsque le moteur tourne à la vitesse de 3 600 tr / min.

$x(t) = A \cos \omega t \qquad A = 0.05\ m \qquad v = -\omega A \sin \omega t \qquad a = -\omega^2 A \cos \omega t$

Si $f = 3600\ tr/min = 60 Hz, Ainsi\ \ \omega = 120 \pi s^{-1}$

$$v_{max} = \omega A = 120\pi \times 0.05 = 18.8\, m/s\, ;\ a_{max} = \omega^2 A = (120\pi)^2 \times 0.05 = 7.11\ km/s^2$$