Chapitre 2

Introduction

Le décideur a tendance de simplifier la réalité. Il peut donc noter d'abord toutes les observations ou historiques (chiffrier) avant de modéliser le problème ou directement le formaliser si la décision à prendre est parfaitement structurée et programmable. Dans ce chapitre, nous abordons la modélisation mathématique des problèmes. Nous passons ensuite à la présentation d'une technique d'analyse de décision qui sont les arbres de décision

1. Modélisation et Programmation Mathématique

1.1. Définition

Le terme programmation faisant référence au domaine de la prise de décision est différent au codage informatique. La programmation mathématique est un ensemble de méthodes mathématiques dont le but est de trouver un optimum pour un problème décisionnel

1.2. Programmation linéaire

La programmation linéaire est la programmation mathématique dont la modelisation est la plus simple(sans puissance, sans logarithme…etc.) . Elle a été découverte en 1947 par G.B. Dantzig. Il inventait un l'*algorithme du simplexe* permettant de résoudre les programmes linéaires.

Programme linéaire. On appelle programme linéaire un modèle d'optimisation vérifiant les quatre conditions suivantes :
tous les paramètres sont connus avec exactitude,
• la fonction objective et les membres de gauche des contraintes peuvent s'écrire comme une somme de produits d'une variable par un paramètre f(X)=somme (coefficient i*x i)
• les contraintes sont des inégalités au sens large ou des égalités, G(X)
• le modèle comporte une fonction objectif qui doit être maximisée ou bien minimisée.

Exemple 1 : Problème économique de fabrication de lampes
Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de lampes de chevet et possède actuellement deux modèles à son catalogue. Ces lampes sont très demandées et il est possible d'en vendre autant que l'on est capable d'en produire. Chaque lampe nécessite une certaine quantité de matière première (tissu et métal) et de main d'oeuvre. La table indique pour chaque type de lampe la quantité de chaque matière première et le temps de main d'oeuvre qu'elle nécessite.

Modèle	L1	L2
Métal	200g	400g
Tissu	100g	50g
Main d'oeuvre	15 min	25 min

Question ! Sachant que les lampes L1 et L2 rapportent respectivement 620 DA et 950 DA de profit et que l'entreprise dispose de 200h de main d'oeuvre, de 200kg de métal et de 50 kg de tissu, construire un modèle qui permettra à l'entreprise de planifier au mieux sa production.

Solution :
Nous utiliserons x1 le nombre de lampes L1 produites et x2 le nombre de lampes L2 produites.

La fonction objectif mesurera le profit total : f(x1 ;X2)

Max f(x1 ;X2)=620 x1 + 950 x2 DA
La contrainte de métal s'écrit
$200\ x1 + 400\ x2 \leq 200\ 000$ g
la contrainte de disponibilité de tissu s'écrit
$100\ x1 + 50\ x2 \leq 50\ 000$ g
et la contrainte de main d'oeuvre sera
$15\ x1 + 25\ x2 \leq 12\ 000$ min
Il reste à ajouter les contraintes de non-négativité $x1, x2 \geq 0$.

Le modèle linéaire :

$$\begin{gathered}\text{Max } 620\ x1 + 950\ x2 \\ 200\ x1 + 400\ x2 \leq 200\ 000 \\ 100\ x1 + 50\ x2 \leq 50\ 000 \\ 15\ x1 + 25\ x2 \leq 12\ 000 \\ x1, x2 \geq 0.\end{gathered}$$

Travail à faire : utilisez un solveur en ligne ou non
Peut on utiliser une méthode graphique pour trouver des solutions possibles et optimales ?

Exemple 2 :Problème de découpage [1]

Une entreprise fabrique des meubles à partir des plaques de bois. Les plaques ont une longueur de deux mètres et une largeur d'un mètre et dix centimètres. L'entreprise consomme les plaques en les découpant longitudinalement. Les besoins de l'entreprise sont les suivants : 1000 plaques de 16 centimètres, 1200 plaques de 20 centimètres et 1800 plaques de 25 centimètres. Pour satisfaire ses besoins, l'entreprise utilise cinq plans de découpage dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

Plan numéro	Nombre de plaques			Pertes (cm)
	16 cm	20 cm	25 cm	
1	2	0	3	3
2	3	3	0	2
3	5	0	1	5
4	4	1	1	1
5	1	2	2	4

Question Modéliser le problème : L'entreprise cherche à satisfaire les besoins en minimisant les pertes de découpage.

Solution :

Pour ce problème, on dénombre cinq variables de décision :

[1] La modélisation sous forme de programme linéaire : Outil efficace d'aide à la décision BOUMEDJANE Adel ACHI Adel , 2009 مجلة البحوث و الدراسات جوان

x_1 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 1 x_2 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 2 x_3 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 3 x_4 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 4 x_5 : nombre des fois de l'utilisation le plan numéro 5

Les contraintes de ce problème sont la satisfaction des besoins qui s'expriment par les inéquations suivantes :

La contrainte des plaques de 16cm : $2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+1x_5 \geq 1000$

La contrainte des plaques de 20cm : $0x_1+3x_2+0x_3+1x_4+2x_5 \geq 1200$

La contrainte des plaques de 25cm : $3x_1+0x_2+1x_3+1x_4+2x_5 \geq 1800$

L'entreprise vise à minimiser les pertes du découpage. L'expression de la fonction objective est :

Minimiser $Z = (3x_1+2x_2+5x_3+1x_4+4x_5)$

Les valeurs de variables de décision ne peuvent être que entières et non négatives, parce que le nombre des fois ne peut être plus fractionnaire, on écrit donc : $x_j \geq 0$ (j=1,2,…,5) entier et non négatif.

Le modèle linéaire est donc :

$$\text{Minimiser } 3x_1+2x_2+5x_3+1x_4+4x_5$$

$$2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+1x_5 \geq 1000$$

$$0x_1+3x_2+0x_3+1x_4+2x_5 \geq 1200$$

$$3x_1+0x_2+1x_3+1x_4+2x_5 \geq 1800$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,\ldots,5)$$

Travail à faire : utilisez un solveur en ligne ou non
Peut on utiliser une méthode graphique pour trouver des solutions possibles et optimales ?

A suivre