الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHIHA
Djilali

Formules autorisées

Système à un degré de liberté libre

Equation de mouvement

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Longrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

1er cas : *système sous amorti* ($\xi < 1 \quad ou \quad c < c_c$).

La solution est donnée par $x(t) \; = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\}$

Avec ω_d pulsation de vibration amortie ou pseudo-pulsation $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{n} ln \frac{x_0}{x_n}; \;\; \delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

2er cas : *amortissement critique* ($\xi = 1 \quad ou \quad c = c_c$).

La solution est donnée par $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$

3er cas : *système sur amorti* ($\xi > 1 \quad ou \quad c > c_c \quad ou$).

La solution peut être écrite sous la forme : $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \operatorname{ch}\omega^* t + A_2 \operatorname{sh}\omega^* t\}$ avec $\omega^* = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Système à un degré de liberté Forcé

L'équation de mouvement d'un système avec amortissement visqueux sous critique

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\Omega t$

$x_p(t) = X\cos(\Omega t - \alpha)$

La solution complète est donnée par $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Avec $X = \dfrac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + (c\Omega)^2}} = \dfrac{X_0}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\xi r)^2}}$; avec $r = \dfrac{\Omega}{\omega_n}$ (Rapport des fréquences);

$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)$ et $X_0 = F_0 / k$ Allongement sous la force statique F_0;

Système à deux degrés de liberté

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \qquad i = 1,2$$

T L'énergie cinétique ; V l'énergie potentielle ; D la fonction de dissipation ;
F_i la force généralisée ; q_i coordonnée généralisée

Les fractions modales.

$r_i = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(i)} \qquad i = 1,2$

Les réponses libres

$x_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t$

$x_2(t) = r_1 A_1\cos\omega_1 t + r_1 B_1\sin\omega_1 t + r_2 A_2\cos\omega_2 t + r_2 B_2\sin\omega_2 t$

La réponse forcée du système

$\vec{X} = [Z(\Omega)]^{-1}\vec{F}_0$

$$[Z(\Omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(\Omega)Z_{22}(\Omega) - Z_{12}^2(\Omega)}\begin{bmatrix} Z_{22}(\Omega) & -Z_{12}(\Omega) \\ -Z_{12}(\Omega) & Z_{11}(\Omega) \end{bmatrix}$$