Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques USTO MB
2020/2021

Test d'Algèbre 4
Durée : 1h

Exercice 1. (4 pts)
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{e_1,\dots,e_p\}$ une base de F que l'on complète en une base de E : $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n\}$. On note $\mathcal{B}^*=\{e_1^*,\dots,e_p^*,e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}$ la base duale de $\mathcal{B}$.
1. Montrer que $\{e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}\in F^\perp$.
2. Soit $\ell\in F^\perp$, écrire ℓ dans $\mathcal{B}^*$.
3. En déduire que $\{e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}$ est une base de $F^\perp$ et $\dim F+\dim F^\perp=\dim E$.

Exercice 2. (6 pts)
Soit φ la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter φ ainsi que la forme quadratique q associée.
2. Déterminer son rang et son noyau. Est-ce une forme non dégénérée ?
3. Trouver l'orthogonale de $F=\mathrm{Vect}\{(1,0,0),(1,0,1)\}$.

بِالتّوفيق

Corrigé

Exercice 1. (4 pts)

1.

$$e_i^* : E^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right. \quad \textbf{(1pt)}$$

Pour $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $i \in \{p+1, \ldots, n\}$, on a $e_i^*(e_j) = 0$, donc $\{e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*\} \in F^{\perp}$. **(0.5 pt)**

2. Soit $\ell \in F^{\perp}$. Comme $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*, alors $\ell = \sum\limits_{i=1}^{n} \ell(e_i)e_i^*$. **(0.5 pt)** Or pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ on a $\ell(e_i) = 0$ (car $e_i \in F$) **(0.5 pt)**, donc

$$\textbf{(0.5 pt)} \quad \ell = \sum_{i=p+1}^{n} \ell(e_i)e_i^*. \tag{1}$$

3. La relation (1) montre que $\{e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*\}$ est une famille génératrice de $F^{\perp}$ et puisque elle est libre car est un sous-ensemble d'une base, elle forme une base de $F^{\perp}$. **(0.5 pt)** Ainsi

$$\dim F^{\perp} = n - p = \dim E - \dim F. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 2. (6 pts)

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3. \quad \textbf{(1 pt)}$$

$$q(x) = \varphi(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3. \quad \textbf{(1 pt)}$$

2. On a : $2 \times L_2 - L_3 = L_1$, donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$. **(0.5 pt)**

$(x, y, z) \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on résout le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y3z = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -2z, \ z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{array} \right. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Ainsi $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1)\}$. **(0.5 pt)** et donc φ est dégénérée. **(0.5 pt)**

3. Cherchons un vecteurs $x = (a, b, c)$ dans $F^{\perp}$.

On doit avoir $\varphi(x, v_1) = 0$ et $\varphi(x, v_2) = 0$, avec $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 1)$ c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a + b + c + a + 3b + 5c = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3b - 5c \\ b = b \\ c = c \end{array} \right. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\{(-3, 1, 0), (-5, 0, 1)\}$. **(0.5 pt)**