Université des Sciences et de laTechnologie d'Oran
Département de Génie Civil - Maths2
Fiche de TD N^{0}3 (2019/2020)
Matrices et Déterminants

Exercice 1.1) Calculer AB, BA et $A+B$ lorsque ceci est possible :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Trouver les matrices transposées de A et B.
3) Déterminer l'application linéaire associée à chacune des matrices A et B.

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En calculant A^2, montrer que A est inversible et en déduire la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 3. Soit l'application linéaire définie par

$$f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3, f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) Ecrire la matrice A associée à f suivant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$ où I_3 est la matrice identité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5. Calculer à l'aide des déterminants les inverses des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé du TD3 _ Matrices et Determinants

Exercice 1 : • La somme de deux matrices est possible quand elles ont même nombre de lignes et de colonnes c.à.d. même dimensions

• le produit est possible quand la $1^{ière}$ a un nombre de colonne égal au nombre de lignes de la seconde.

A.B n'est pas possible ; A+B n'est pas possible, B.A est possible.

$$B.A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} L_1.C_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) L'application linéaire f associée à A :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x+2y, y, -2x-y)$$

g l'application linéaire associée à B

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-z, 3x-y+2z, x+y+z)$$

Exercice 2 : A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = B.A = I_n$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ alors A est inversible et $A^{-1} = A$

Exercice 3 : $\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$ ← base canonique de $\mathbb{R}^3$

1) $$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2) $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ $3 = 2+1$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ Sinon : calculer $2I_3 - A$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2I_3 - A$$

$$A^2 = 2I_3 - A \iff A^2 - 2I_3 + A = 0 \iff A^2 + A = 2I_3$$
$$\iff A\left(\frac{A+I_3}{2}\right) = I_3$$

$$A.\left(\frac{1}{2}(A+I_3)\right) = I_3 \iff A \text{ inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I_3)$$

Exercice 4 :

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2(-2) = 5$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 2(4-6) - 5(3-8) + (9-16)$

$\Delta_2 = +14$

Ou bien :

$$\Delta_2 = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \underset{C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(7-14)$$

d'où $\Delta_2 = 14$

- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 \\ 8 & 9 & -15 \end{vmatrix} \underset{L_3 - 5L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 \\ -17 & -21 & 0 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -17 & -21 \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = 3\,[2(-21) - (-17).3] = 27$ $\qquad \Delta_3 = 27$

Ou bien : $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = 2(6-63) - 3(5-56) + 4(45-48) = -114 + 153 - 12$

$\Delta_3 = 27$

Exercice 5 : Calcul des inverses.

- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{{}^tC}{\det(A)}$, C comatrice de A $\downarrow$ matrice des cofacteurs de A

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-2 = 4 \neq 0$ alors A inversible

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$c_{11} = +3, \quad c_{12} = -2, \quad c_{21} = -1, \quad c_{22} = 2 \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification : $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det(B) = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{vmatrix} \underset{=}{C_2 - C_3} \begin{vmatrix} -7 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & 3 \\ -12 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{=}{L_2 + L_3} \begin{vmatrix} -7 & 0 & 3 \\ -18 & 0 & 8 \\ -12 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{vmatrix} = -[-56 + \underbrace{18 \cdot 3}_{54}] = 2 \neq 0$$

alors B est inversible

$B^{-1} = \dfrac{{}^tC}{\det B}$, $\quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$c_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$

$c_{12} = - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = -[-30 + 36] = -6$

de la même façon on trouve les autres coefficients

d'où $C = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \dfrac{{}^tC}{\det B}$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vérification : $B \cdot B^{-1} = I_3$