Algèbre 3
TD n°4 : Corrigé de l'exercice 1

Exercice 1.

Soit la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2\times L_1 \\ &= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En développant par rapport à la troisième colonne on trouve

$$P_{A_2}(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Cherchons le sous-espace $E_{\lambda_1} = \ker(A - 3I_3)$ associé à $\lambda_1 = 3$ qui est a priori une droite vectorielle représentée par

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x-3y+4z=0 \\ 4x-10y+8z=0 \\ 6x-7y+4z=0 \end{cases} \iff 2x = y = z.$$

D'où $E_{\lambda_1} = Vect(u_1)$ avec $u_1 = (1,2,2)$.
Le sous-espace $E_{\lambda_2} = \ker(A+I_3)$ associé à $\lambda_2 = -1$, valeur propre double, peut a priori être de dimension 1 ou 2. Le système qui le définit est

$$(A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ 4x-6y+8z=0 \\ 6x-7y+8z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 2x \end{cases}$$

Donc $E_{\lambda_2} = Vect(u_2)$ avec $u_2 = (1,2,1)$. Ce sous-espace étant de dimension inférieure à 2, ordre de la valeur propre -1, A_2 n'est pas diagonalisable.
En prenant pour base (u_1,u_2,u_3) o u_3 est un vecteur quelconque indépendant de u_1 et u_2 on aura la matrice triangulaire semblable A_2 :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour préciser la matrice de passage ainsi que a et b, prenons pour u_3 par exemple le vecteur e_1 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce choix est acceptable car dans cette base

$$\det(u_1,u_2,e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Remarquons que $u_3 = e_2$ convient aussi, mais pas $u_3 = e_3$. La matrice de passage est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver a et b en écrivant

$$T = P^{-1}A_2P,$$

mais il est plus simple de remarquer que

$$A_2u_3 = au_1 + bu_2 - u_3 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=4 \\ b=-2 \end{array} \right.$$

Donc $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons qu'il y a une infinité de changements de base permettant de trigonaliser une matrice donnée.

Soit la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. $P_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^3$.

Remarquons que la matrice A_3 n'est certainement pas diagonalisable, car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc nécessairement égale à I_3, ce qui, de toute évidence, n'est pas le cas. Cherchons à présent les vecteurs propres de A_3 associés à la valeur propre triple $\lambda = 1$.

$$(x,y,z) \in \ker(A_3 - I_3) \Longleftrightarrow (A_3 - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x - y + 2z = 0 \\ -15x - 7y + 11z = 0 \\ -14x - 6y + 10z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z/2 \\ y = z/2 \\ z = z \end{array} \right.$$

En choisissant $z = 2$, on obtient le vecteur propre $u_1 = (1,1,2)$,

(Ici, c'est plus complexe qu'à la question précédente. Au A_2), on avait trouvé deux vecteurs propres indépendants. Il ne restait plus qu'à en trouver un troisième, formant une base avec les deux autres, puis à en exprimer l'image par A_2 pour trigonaliser A_2. Ici, comme il n'y a qu'un seul vecteur propre, cette méthode ne va pas fonctionner. Nous allons procéder comme suit :

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A_3$. Il s'agit à présent de compléter le vecteur u_1 par deux vecteurs de telle sorte que l'on obtienne une base de $\mathbb{R}^3$. Il Y a une infinité de manières d'y arriver. Par souci de simplicité, nous choisissons de compléter u_1 par les deux vecteurs $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous obtenons la nouvelle base $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Écrivons la matrice représentative de f dans cette nouvelle base. En utilisant l'égalité

$$u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \Longleftrightarrow e_1 = u_1 - e_2 - 2e_3$$

on obtient d'une part :

$$f(e_2) = -e_1 - 6e_2 - 6e_3 = -u_1 - 5e_2 - 4e_3$$

et d'autre part:

$$f(e3) = 2e_1 + 11e_2 + 11e_3 = 2u_1 + 9e_2 + 7e_3.$$

D'où, puisque $f(u_1) = u_1$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants e_2 et e_3. La famille $\mathcal{B}'_F = (e_2, e_3)$ constitue une base de F. On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme g de F tel que

$$Mat_{\mathcal{B}'_F}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} g(e_2) & g(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Le but est maintenant de trigonaliser g. $P_g(\lambda) = (\lambda - 1)^2$
Cherchons les vecteurs propres de g associés à la valeur propre double $\lambda = 1$. Nous effectuons les calculs dans la base $\mathcal{B}'_F$.

$$(y, z) \in \ker(Mat_{\mathcal{B}'_F}(g) - I_3) \iff (Mat_{\mathcal{B}'_F}(g) - I_3)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} -6y + 9z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 3z/2 \\ z = z \end{array} \right.$$

En choisissant $z = 2$, on obtient le vecteur propre $u_2 = (0, 3, 2)$. Écrivons à présent la matrice représentative de g dans la nouvelle base $\mathcal{C}_F = (u_2, e_3)$ du sous-espace F. D'une part, $g(u_2) = u_2$ puisque u_2 est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda = 1$. D'autre part, on déduit de $Mat_{\mathcal{B}'_F}(g)$ que

$$g(e_3) = 9e_2 + 7e_3.$$

Or

$$u_2 = 3e_2 + 2e_3 \iff e_2 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}e_3.$$

Ainsi

$$g(e_3) = 9\left(\frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}e_3\right) + 7e_3 = 3u_2 + e_3.$$

On obtient ainsi

$$Mat_{\mathcal{C}_F}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} g(u_2) & g(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Revenons maintenant à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et écrivons sa matrice représentative dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, e_3)$. On vérifie que l'on a :

$$\begin{aligned} f(u_2) &= f(3e_2 + 2e_3) = 3f(e_2) + 2f(e_3) \\ &= 3(-u_1 - 5e_2 - 4e_3) + 2(2u_1 + 9e_2 + 7e_3) \\ &= u_1 + 3e_2 + 2e_3 = u_1 + u_2. \end{aligned}$$

$$f(e_3) = 2u_1 + 9e_2 + 7e_3 = 2u_1 + 3u_2 + e_3.$$

D'où, puisque $f(u_1) = u_1$

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

et on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.