Faculté des Mathématiques et Informatique — USTO MB
Département de Mathématiques — 2021/2022

Algèbre 3
TD n°4 : Corrigé des exercices 2 et 4

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $rg(A+I) = 1$, $\dim(\ker(A+I)) = 2$ donc -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite $P_A(X) = (X+1)^2(X-5)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par $P_A(X)$ fournit trois réels a, b et c et un polynôme Q tels que $X^n = P_A Q + aX^2 + bX + c$. En prenant les valeurs des membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1, on obtient

$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 5^n \\ a - b + c = (-1)^n \\ -2a + b = n(-1)^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ b = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n) \\ c = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \end{cases}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36}\Big((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + (2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I\Big) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

1. $P_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. On obtient $E_{-2} = Vect\{v_1\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = Vect\{v_2\}$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(E_1) = 1 \neq 2$ donc A n'est pas diagonalisable.

   On prend $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut djà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Plus prcisément

$$Av_3 - v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = v_2$$

et donc $Av_3 = v_2 + v_3$ puis

$$A = PTP^{-1} \text{ où } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par P_A fournit trois rels a, b et c et un polynôme Q tels que $X^n = P_A Q + aX^2 + bX + c$. En prenant les valeurs des membres en -2, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs drives en 1, on obtient
$$\left\{\begin{array}{l} 4a_n - 2b + c = (-2)^n \\ a + b + c = 1 \\ 2a + b = n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \\ b = \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) \\ c = \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) \end{array}\right.$$
Le thorme de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{9}\Big(((-2)^n + 3n - 1)A^2 + ((-2)^{n+1} + 3n + 2)A + ((-2)^n - 6n + 8)I\Big) \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$