الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant : BOUTCHICHA Djilali

Examen Final de « Vibrations et Ondes Mécaniques »

Exercice 1 ***(10 points)***

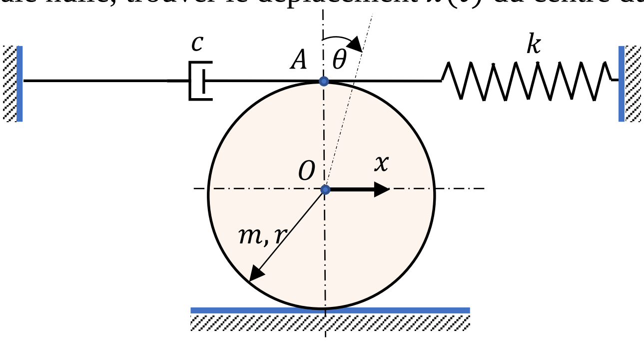
Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mr^2$ relié par un amortisseur de coefficient d'amortissement c et un ressort de raideur k au point A où $OA = r$. On suppose que le disque roule sans glissement ($x = r\theta$).

a) Déterminer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle V et la fonction de dissipation D.

b) Déterminer l'équation de mouvement du système (Méthode de Lagrange).

c) Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

d) Si le coefficient d'amortissent est $c = \sqrt{km}$, le disque est relâché à partir de $\theta(0) = \theta_0$ et une vitesse initiale nulle, trouver le déplacement $x(t)$ du centre du disque.



a)

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

- $\boxed{T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2}$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $2r\theta = 2x$)

- $\boxed{V = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 2kx^2}$

La fonction de dissipation

- $\boxed{D = \frac{1}{2}c(2\dot{x})^2 = 2c\dot{x}^2}$

b)

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4kx \quad ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 4c\dot{x}$$

D'où l'équation de mouvement

- $\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + 4kx = 0$; et avec $\begin{cases} x = r\theta \\ \dot{x} = r\dot{\theta} \\ \ddot{x} = r\ddot{\theta} \end{cases} \Longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{\theta} + 4c\dot{\theta} + 4k\theta = 0$

c) On transforme l'équation de mouvement sous la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{8c}{3m}\dot{x} + \frac{8k}{3m}x = 0$$

La pulsation propre

- $\omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{8c}{3m} \Longrightarrow 2\xi\sqrt{\frac{8k}{3m}} = \frac{8c}{3m} \Longrightarrow \xi = \frac{8c}{2\times 3m}\sqrt{\frac{3m}{8k}}$$

- $\xi = \frac{2c}{\sqrt{2km}}$

d) Si $c = \sqrt{km}$

- $\xi = \frac{2\sqrt{km}}{\sqrt{6km}} = \frac{2}{\sqrt{6}} < 1$

La réponse est de la forme

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}[-\omega_d A_1\sin\omega_d t + \omega_d A_2\cos\omega_d t]$$

Les conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow x(0) = r\theta_0$$

$$e^0\{A_1\cos 0 + A_2\sin 0\} = r\theta_0$$

- $A_1 = r\theta_0$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$-\xi\omega_n e^0\{A_1\cos 0 + A_2\sin 0\} + e^0[-\omega_d A_1\sin 0 + \omega_d A_2\cos 0] = 0$$

$$-\xi\omega_n A_1 + \omega_d A_2 = 0$$

- $A_2 = \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}$

Le déplacement $x(t)$ du centre du disque

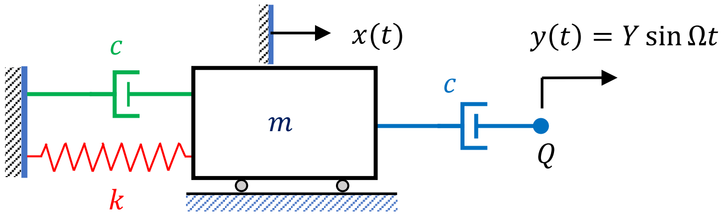
- $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{r\theta_0\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\}$

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

Exercice 2 *(10 points)*

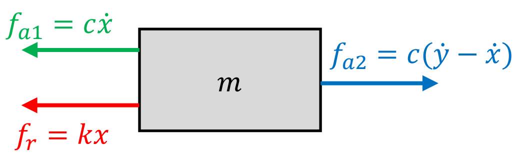
Pour le système illustré ci-dessous, x et y désignent respectivement les déplacements absolus de la masse m et de l'extrémité Q.

1) Déterminer l'équation de mouvement du système (méthode de Newton).
2) Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.
3) Déterminer l'amplitude et la phase de la réponse forcée $x_p(t)$.
4) Déterminer la réponse totale dans le cas où l'amortissement est critique et les conditions initiales sont nulles.



1) Déterminer l'équation de mouvement du système (méthode de Newton).

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre



Application de la 2ème loi de Newton

$$\xrightarrow{+} \sum f_x = m a_x$$

$$m_a = -f_{a1} - f_r - f_{a2}$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$f_{a1} = c\dot{x}$$

$$f_{a2} = c(\dot{y} - \dot{x})$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + c(\dot{y} - \dot{x})$$

$$m\ddot{x} + 2c\,\dot{x} + k\,x = c\,\dot{y}$$

$$y(t) = Y \sin \Omega t \quad \Longrightarrow \quad \dot{y}(t) = \Omega Y \cos \Omega t$$

L'équation de mouvement

La force extérieure $F(t) = c\,\dot{y}(t) = c\Omega Y \cos \Omega t$

Posons $F_0 = c\Omega Y$

$$\boxed{m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

2) ***Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.***

- **La pulsation propre**

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- **Facteur d'amortissement**

$$2\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

$$\boxed{\xi = \frac{c}{\sqrt{km}}}$$

3) ***Déterminer l'amplitude et la phase de la réponse forcée*** $x_p(t)$.

La solution est donnée dans la feuille des formulaires

$$\boxed{X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k_e - m_e\Omega^2\right)^2 + \left(c_e\Omega\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{c_e\Omega}{k_e - m_e\Omega^2}\right)}$$

En comparent $m_e\ddot{x} + c_e\dot{x} + k_ex = F_0\cos\Omega t$ avec $m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$

$$m_e = m\,;\ k_e = k\,; c_e = 2c\,; F_0 = c\Omega Y$$

L'amplitude

$$\boxed{X = \frac{c\Omega Y}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (2c\Omega)^2}}}$$

La phase

$$\boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2c\Omega}{k - m\Omega^2}\right)}$$

4) ***Déterminer la réponse totale dans le cas où l'amortissement est critique et les conditions initiales sont nulles.***

Dans ce cas la solution totale est de la forme

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\omega_nt} + X\cos(\Omega t - \alpha)$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = C_2e^{-\omega_nt} + (C_1 + C_2t)(-\omega_n)e^{-\omega_nt} - \Omega X\sin(\Omega t - \alpha)$$

Avec les conditions initiales nulles

$$x(0) = 0 \Longrightarrow \quad (C_1 + C_2\times 0)e^{-\omega_n\times 0} + X\cos(\Omega\times 0 - \alpha) = 0$$

$$C_1 + X\cos(-\alpha) = 0$$

$$\boxed{C_1 = -X\cos\alpha}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow \quad C_2e^{-\omega_n\times 0} + (C_1 + C_2\times 0)(-\omega_n)e^{-\omega_n\times 0} - \Omega X\sin(\Omega\times 0 - \alpha) = 0$$

$$C_2 - \omega_nC_1 - \Omega X\sin(-\alpha) = 0$$

$$\boxed{C_2 = -\omega_nX\cos\alpha - \Omega X\sin\alpha}$$

La solution totale est

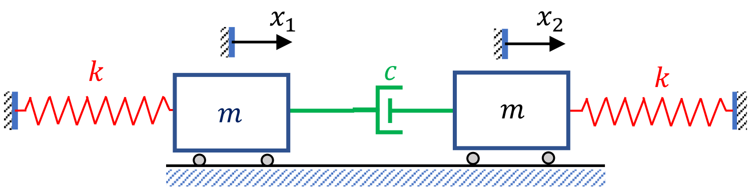
$$\boxed{x(t) = [-\cos\alpha + (-\omega_n\cos\alpha - \Omega\sin\alpha)t]Xe^{-\omega_nt} + X\cos(\Omega t - \alpha)}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA Djilali

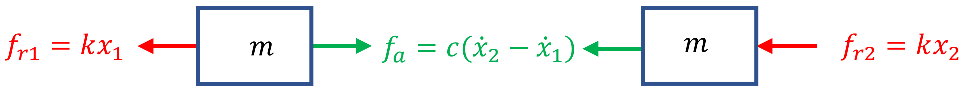
Exercice 3 *(supplémentaire 4 points)*

Déterminer les équations de mouvement du système à deux degrés de liberté suivant :

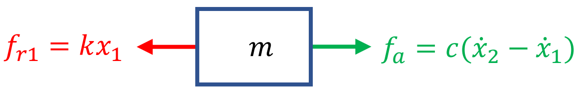


Solution :

Isoler les masses et tracer le diagramme du corps libre



Application de la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton pour la première masse



$$\xrightarrow{+} \sum f_x = ma_x$$

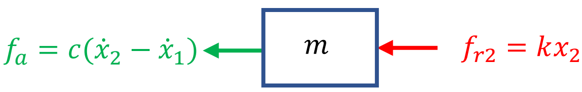
$$m_a = -f_{r1} + f_a$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_{r1} = kx_1$$
$$f_a = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$
$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + kx_1 = 0} \qquad \textbf{(1)}}$$

Application de la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton pour la deuxième masse



$$\xrightarrow{+} \sum f_x = ma_x$$

$$m_a = -f_{r2} - f_a$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_{r2} = kx_2$$
$$f_a = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{m\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 + kx_2 = 0} \qquad \textbf{(2)}}$$