الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Djilali
BOUTCHICHA

Examen Final
L2 Aéronautique
Ondes et vibrations

1. Utiliser la formule d'Euler pour passer de la forme exponentielle à la forme trigonométrique.

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(a_1 e^{i\omega_d t} + a_2 e^{-i\omega_d t}\right).$$

$$e^{i\omega_d t} = \cos\omega_d t + i\sin\omega_d t$$

$$e^{-i\omega_d t} = \cos\omega_d t - i\sin\omega_d t$$

$$a_1 e^{i\omega_d t} + a_2 e^{-i\omega_d t} = a_1\cos\omega_d t + i a_1\sin\omega_d t + a_2\cos\omega_d t - i\,a_2\sin\omega_d t$$

$$a_1 e^{i\omega_d t} + a_2 e^{-i\omega_d t} = (a_1 + a_2)\cos\omega_d t + i(a_1 - a_2)\sin\omega_d t$$

$$a_1 e^{i\omega_d t} + a_2 e^{-i\omega_d t} = A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(a_1 e^{i\omega_d t} + a_2 e^{-i\omega_d t}\right).$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t)$$

2. Une machine vibre avec un mouvement harmonique simple à une fréquence de 20 Hz et une accélération d'amplitude de 0,5g. Déterminer le déplacement et la vitesse de la machine. Utilisez la valeur de g comme 9.81 m/s^2.

$$x(t) = \mathrm{X}\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega\mathrm{X}\sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2\mathrm{X}\cos(\Omega t - \alpha)$$

$$\Omega = 2\pi f = 40\pi\ rad/s.$$

Amplitude de l'accélération

$$A = \Omega^2\mathrm{X} = (2\pi f)^2\mathrm{X} = (40\pi)^2\mathrm{X} = 0.5\mathrm{g}$$

Amplitude du déplacement

$$\mathrm{X} = \frac{0.5\mathrm{g}}{\Omega^2} = \frac{0.5\times 9.81}{(40\pi)^2} = 3.1061\times 10^{-4} m$$

Amplitude de la vitesse

$$V = \Omega\mathrm{X} = 40\pi\mathrm{X} = 3.9032\times 10^{-2}\ m/s$$

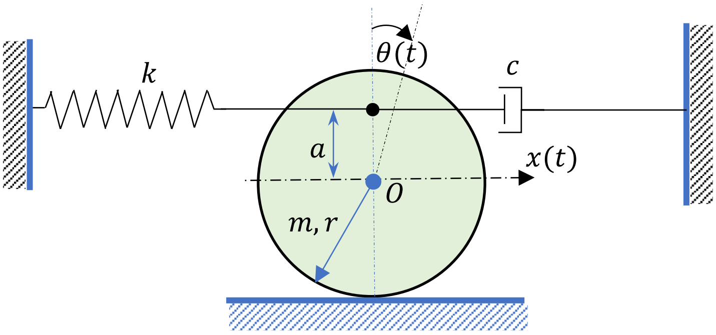
$$x(t) = 3.1061\times 10^{-4}\cos(40\pi t - \alpha)\ \ m$$

$$\dot{x}(t) = 3.9032\times 10^{-2}\cos\left(40\pi t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\ m/s$$

الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليــــــــم العــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Djilali
BOUTCHICHA

3. Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, roule sans glissement. Le disque est relié à un ressort et un amortisseur à une distance a du centre O.
   - Calculer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle V et la fonction de dissipation D.
   - Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation de mouvement ;
   - Calculer la fréquence naturelle du système pour de petits angles $\theta(t)$ d'oscillation.



Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i$$

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2}$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $(r+a)\theta$.)

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k[(r+a)\theta]^2 = \frac{1}{2}k(r+a)^2\theta^2}$$

La fonction de dissipation

$$\boxed{D = \frac{1}{2}c\left[(r+a)\dot{\theta}\right]^2 = \frac{1}{2}c(r+a)^2\dot{\theta}^2}$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}\ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(r+a)^2\theta\ ;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c(r+a)^2\dot{\theta}.$$

D'où l'équation de mouvement

$$\boxed{\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + c(r+a)^2\dot{\theta} + k(r+a)^2\theta = 0}$$

On transforme l'équation de mouvement sous la forme

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2c}{3m}\frac{(r+a)^2}{r^2}\dot{\theta} + \frac{2k}{3m}\frac{(r+a)^2}{r^2}\theta = 0}$$

La pulsation propre

$$\boxed{\omega_n = \frac{(r+a)}{r}\sqrt{\frac{2k}{3m}}}$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{2c}{3m}\left(\frac{(r+a)}{r}\right)^2 \Rightarrow 2\xi\frac{(r+a)}{r}\sqrt{\frac{2k}{3m}} = \frac{2c}{3m}\left(\frac{(r+a)}{r}\right)^2$$

$$\boxed{\xi = \frac{(r+a)}{r}\frac{c}{\sqrt{6km}}}$$