الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

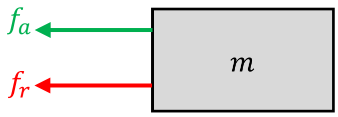
BOUTCHICHA
Djilali

Examen final VOM 2021

Solution ex 1 : (chaque ■ vaut 0.5 point ; la somme 12 points)

a) Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre
Application de la 2ème loi de Newton



$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = m a_x \qquad ■$$

$$m a_x = -f_a - f_r \qquad ■$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$f_a = c\dot{x}$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0 \qquad ■■$$

b) Calculs

- Coefficient d'amortissement critique
  $c_c = 2\sqrt{km}$; Application numérique $c_c = 2\sqrt{100\times 4} = 40 \;\; N.s/m$ ■
- Facteur d'amortissement
  $\xi = \frac{c}{c_c}$; Application numérique $\xi = \frac{5}{40} = 0.125$ ■
- Décrément logarithmique
  $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ Application numérique $\delta = \frac{2\pi * 0.125}{\sqrt{1-0.125^2}} = 0.792$ ■
- Pulsation propre
  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; Application numérique $\omega_n = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 \;\; rad/s$ ■
- Pseudo-pulsation
  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ Application numérique $\omega_d = 5\sqrt{1-0.125^2} = 4.961 \;\; rad/s$ ■

c) La réponse libre du système

La réponse pour un système sous amorti $(\xi < 1)$ est :

L'expression du déplacement

- $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right)$ ■

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) + e^{-\xi\omega_n t}\omega_d\left(-A_1 \sin\omega_d t + A_2 \cos\omega_d t\right)$$

- $\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{-\xi\omega_n\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) + \omega_d\left(-A_1 \sin\omega_d t + A_2 \cos\omega_d t\right)\right\}$ ■

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{\left(-A_1\xi\omega_n + A_2\omega_d\right)\cos\omega_d t + \left(-A_2\xi\omega_n - A_1\omega_d\right)\sin\omega_d t\right\}$$

BOUTCHICHA
Djilali

- Les conditions initiales

$$x(0) = x_0$$
$$e^0\left(A_1\cos 0 + A_2\sin 0\right) = x_0$$
$$A_1 = x_0$$
$$\dot{x}(0) = v_0$$
$$e^0\left\{\left(-A_1\xi\omega_n + A_2\omega_d\right)\cos 0 + \left(-A_2\xi\omega_n - A_1\omega_d\right)\sin 0\right\} = v_0$$
$$-A_1\xi\omega_n + A_2\omega_d = v_0$$
$$A_2 = \frac{v_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_d}$$

$$x_0 = x(0) = 0.1\ m$$
$$v_0 = \dot{x}(0) = 44\ cm/s = 0.44\ m/s$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t + \tfrac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$
$$x(t) = e^{-0.125\times 5t}\left(0.1\cos 4.96t + \tfrac{0.44+0.125\times 5\times 0.1}{9.68}\sin 4.96t\right)$$
$$x(t) = e^{-0.625t}\left(0.1\cos 4.96t + 0.1\sin 4.96t\right)$$

d) La réponse forcée

- Pulsation d'excitation $\Omega = 5\ rad/s$
- Déplacement statique $X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{10}{100} = 0.1\ m$
- Rapport des fréquences $r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{5}{5} = 1.0$
- Amplitude forcée $X = \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-r^2\right)+\left(2\xi r\right)^2}} = \frac{0.1}{\left(2\times 0.125\times 1.0\right)} = 0.4\,m$
- Angle de phase entre la force d'excitation et la réponse forcée

  $\alpha = \arctan\frac{2\xi r}{1-r^2} = \arctan\frac{2\times 0.125\times 1}{0} = \frac{\pi}{2}\ rad$
- La réponse permanente du système

  $x(t) = X\cos\left(\Omega t - \alpha\right)$

  $x(t) = 0.4\cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$