الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

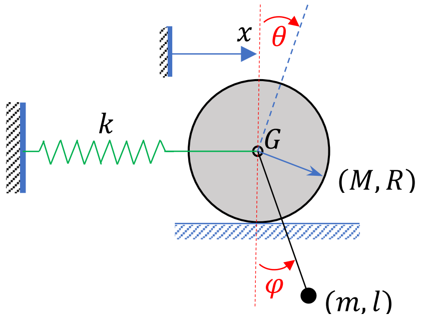
BOUTCHICHA
Djilali

Examen final de « VOM » 2021

<u>Exercice 2 (8 points)</u> (chaque ■ vaut 0.5 point ; la somme 10 points)

Un disque de masse M, qui roule sans glissement, de rayon R et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}MR^2$. Oscille sous l'action d'un ressort de raideur k ; un pendule **simple** de longueur $\boldsymbol{l}$ et de masse $\boldsymbol{m}$ est articulé au point G.

a) Déterminer les énergies cinétiques et potentielles de tous les éléments.
b) Déterminer les équations de mouvement en fonction des coordonnées généralisés θ et φ qui restent faibles.



Solution :

Ressort :

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $x = R\theta$)

$$V_R = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$ ■

Disque :

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T_D = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$ ■■

$$T_D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$T_D = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$ ■

Pendule simple :

Energie potentielle de gravitation du pendule simple

$$V_P = mgh$$ ■

$$h = y_m = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi)$$

Pour φ faible $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \cdots$

$$V_P = \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$ ■

Energie cinétique du pendule simple

$$T_P = \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2$$ ■

$$T_P = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta} + l\dot{\varphi}\right)^2$$ ■

L'énergie cinétique du système

$$T = T_D + T_P$$

BOUTCHICHA Djilali

$$T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta} + l\dot{\varphi}\right)^2$$

L'énergie potentielle du système

$$V = V_R + V_P$$

$$V = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

Formalisme de Lagrange

Première coordonnée généralisée ($q_1 = \theta$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} + mR(R\dot{\theta} + l\dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + mR\left(R\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kR^2\theta$$

La première équation de mouvement

$$\left(\frac{3}{2}MR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta} + mRl\ddot{\varphi} + kR^2\theta = 0$$

Seconde coordonnée généralisée ($q_2 = \varphi$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml\left(R\dot{\theta} + l\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mlR\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl\varphi$$

La seconde équation de mouvement

$$mlR\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}MR^2 + mR^2 & mRl \\ mRl & ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} kR^2 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$