Faculté des Mathématiques et Informatique — USTO MB
Département de Mathématiques — 2020/2021

Examen de rattrapage d'Algèbre 4

Durée : 1h15

Exercice 1. (10 pts)
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes $1, X, X^2, X^3$ et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les quatre formes linéaires sur E, ℓ_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, définies par :

$$\ell_k(P) = \int_{-1}^{1} x^k P(x)dx.$$

1. Montrer que $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base du dual E^*.
2. Déterminer sa base duale.

Exercice 2. (10 pts)
Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q_a(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la forme bilinéaire φ_a associée à q_a.
2. Donner la matrice de φ_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver une décomposition de q_a comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.
4. Déterminer en fonction du réel a le rang et la signature de la forme quadratique q_a.

بِالتّوفيق

Corrigé

Exercice 1. (10 pts)

1. Montrons dans un premier temps que la famille $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est libre.
   Soit α, β, γ et δ dans $\mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \alpha\ell_0(P) + \beta\ell_1(P) + \gamma\ell_2(P) + \delta\ell_3(P) = 0 \quad (*). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
   - Pour $P(X) = 1$, $(*) \implies 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = 0$. **(0.5 pt)**
   - Pour $P(X) = X$, $(*) \implies \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{5}\delta = 0$. **(0.5 pt)**
   - Pour $P(X) = X^2$, $(*) \implies \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0$. **(0.5 pt)**
   - Pour $P(X) = X^3$, $(*) \implies \frac{2}{5}\beta + \frac{2}{7}\delta = 0$. **(0.5 pt)**
     D'où le système suivant :
     $$\textbf{(0.25 pt)} \quad \begin{cases} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{5}\delta = 0 & (2) \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0 & (3) \\ \frac{2}{5}\beta + \frac{2}{7}\delta = 0 & (4) \end{cases}$$
     La relation (1) et (2) donne facilement : $\alpha = \gamma = 0$. **(0.5 pt)** De la même manière, la relation (3) et (4) donne : $\beta = \delta = 0$. **(0.5 pt)**
     On en déduit que la famille $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est libre, de plus $\dim(E^*) = 4$. Donc la famille $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base de E^*. **(0.25 pt)**

2. Cherchons les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 sous la forme :
   $$\begin{cases} P_0(X) = a_0X^3 + b_0X^2 + c_0X + d_0 & \textbf{(0.25 pt)} \\ P_1(X) = a_1X^3 + b_1X^2 + c_1X + d_1 & \textbf{(0.25 pt)} \\ P_2(X) = a_2X^3 + b_2X^2 + c_2X + d_2 & \textbf{(0.25 pt)} \\ P_3(X) = a_3X^3 + b_3X^2 + c_3X + d_3 & \textbf{(0.25 pt)} \end{cases}$$
   tels que
   $$\begin{cases} \ell_0(P_0) = 1, \ell_1(P_0) = 0, \ell_2(P_0) = 0, \ell_3(P_0) = 0 & (1) & \textbf{(0.5 pt)} \\ \ell_0(P_1) = 0, \ell_1(P_1) = 1, \ell_2(P_1) = 0, \ell_3(P_1) = 0 & (2) & \textbf{(0.5 pt)} \\ \ell_0(P_2) = 0, \ell_1(P_2) = 0, \ell_2(P_2) = 1, \ell_3(P_2) = 0 & (3) & \textbf{(0.5 pt)} \\ \ell_0(P_3) = 0, \ell_1(P_3) = 0, \ell_2(P_3) = 0, \ell_3(P_3) = 1 & (4) & \textbf{(0.5 pt)} \end{cases}$$
   $$(1) \iff \begin{cases} \frac{2}{5}b_0 + 2d_0 = 1 \\ \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{3}c_0 = 0 \\ \frac{2}{5}b_0 + \frac{2}{3}d_0 = 0 \\ \frac{2}{7}a_0 + \frac{2}{5}c_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = -\frac{15}{8} \\ c_0 = 0 \\ d_0 = \frac{9}{8}. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
   $$(2) \iff \begin{cases} \frac{2}{5}b_1 + 2d_1 = 0 \\ \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}c_1 = 1 \\ \frac{2}{5}b_1 + \frac{2}{3}d_1 = 0 \\ \frac{2}{7}a_1 + \frac{2}{5}c_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -\frac{105}{8} \\ b_1 = 0 \\ c_1 = \frac{75}{8} \\ d_1 = 0. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
   $$(3) \iff \begin{cases} \frac{2}{5}b_2 + 2d_2 = 0 \\ \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}c_2 = 0 \\ \frac{2}{5}b_2 + \frac{2}{3}d_2 = 1 \\ \frac{2}{7}a_2 + \frac{2}{5}c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = \frac{45}{8} \\ c_2 = 0 \\ d_2 = -\frac{15}{8}. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$(4) \iff \begin{cases} \frac{2}{5}b_3 + 2d_3 = 0 \\ \frac{2}{3}a_3 + \frac{2}{3}c_3 = 0 \\ \frac{2}{5}b_3 + \frac{2}{3}d_3 = 0 \\ \frac{2}{7}a_3 + \frac{2}{5}c_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3 = \frac{175}{8} \\ b_3 = 0 \\ c_3 = -\frac{105}{8} \\ d_3 = 0. \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Donc

$$\begin{cases} P_0(X) = -\frac{15}{8}X^2 + \frac{9}{8} \quad \textbf{(0.25 pt)} \\ P_1(X) = -\frac{105}{8}X^3 + \frac{75}{8}X \quad \textbf{(0.25 pt)} \\ P_2(X) = -\frac{45}{8}X^2 - \frac{15}{8} \quad \textbf{(0.25 pt)} \\ P_3(X) = \frac{175}{8}X^3 - \frac{105}{8}X \quad \textbf{(0.25 pt)}. \end{cases}$$

Exercice 2. (10 pts)

1. $\varphi_a(x,y) = x_1y_1 + (1+a)x_2y_2 + (1+a+a^2)x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - ax_2y_3 - ax_3y_2$. **(1.5 pts)**
2. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

3. Pour réduire la forme q on distingue deux cas :

- Si $a = 0$, alors

$$\begin{aligned} q_0(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + x_3^2. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

- Si $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q_a(x) &= x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3 \\ &= (x_1+x_2)^2 + (ax_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 - 2ax_2x_3) \\ &= (x_1+x_2)^2 + a(x_2-x_3)^2 + (1+a^2)x_3^2. \quad \textbf{(2 pts)} \end{aligned}$$

4. Signature et rang de q_a.
   Notons pour p le nombre des coefficients positifs et pour n le nombre des coefficients négatifs et rappelons que $\mathrm{sign}(q_a) = (p,n)$

- Pour $a = 0$, **(0.5 pt)** $\mathrm{sign}(q_0) = (2,0)$ **(0.5 pt)** et $\mathrm{rg}(q_0) = 2$. **(0.5 pt)**
- Pour $a > 0$, **(0.5 pt)**, $\mathrm{sign}(q_a) = (3,0)$ **(0.5 pt)** et $\mathrm{rg}(q_a) = 3$. **(0.5 pt)**
- Pour $a < 0$, **(0.5 pt)**, $\mathrm{sign}(q_a) = (2,1)$ **(0.5 pt)** et $\mathrm{rg}(q_a) = 3$. **(0.5 pt)**