Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

USTO MB
2021/2022

Examen partiel d'Algèbre 4
Durée : 1h

Exercice 1.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Montrer que
   (i) $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$
   (ii) $\mathrm{Im}({}^t u) = (\ker(u))^{\perp}$
2. En déduire que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}({}^t u)$.

Exercice 2.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par :

$$\varphi(x, y) = \alpha x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_2 y_1 - 3x_2 y_2 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_1 + 2x_3 y_2 - x_3 y_3, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer suivant les valeurs de α, le rang φ. Pour quelle(s) valeur(s) de α, φ est non dégénérée ?
3. Donner la forme quadratique q associée et sa décomposition de Gauss.

بِالتّوفيق

Corrigé

Exercice 1. (6 pts)

1. (i) Soit $f \in F^*$, alors on a

$$\begin{array}{rcl} f \in \ker({}^t u) & \Longleftrightarrow & {}^t u(f) = 0 \qquad \textbf{(0.5 pt)} \\ & \Longleftrightarrow & f \circ u = 0 \qquad \textbf{(0.5 pt)} \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in E,\ < u(x), f >= 0 \qquad \textbf{(1 pt)} \\ & \Longleftrightarrow & f \in (\mathrm{Im}(u))^{\perp} \qquad \textbf{(0.5 pt)} \end{array}$$

(ii) Soit $g \in \mathrm{Im}({}^t u)$, alors il existe $f \in F^*$, telle que $g = {}^t u(f)$, **(0.5 pt)** donc pour tout $x \in \ker(f)$, on a

$$< x, g >=< x, {}^t u(f) >=< u(x), f >= 0 \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

donc $g \in (\ker(u))^{\perp}$, par suite $\mathrm{Im}({}^t u) \subset (\ker(u))^{\perp}$. **(0.5 pt)**
Réciproquement soit $g \in (\ker(u))^{\perp}$ et soit G le supléémentaire de $\mathrm{Im}(u)$ dans F. Soit $f : F \longrightarrow K$ définie par,

$$\begin{array}{rcccc} f : F & = & \mathrm{Im}(u) \oplus G & \longrightarrow & K \\ y & = & u(x) + z & \longrightarrow & g(x) \end{array} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Alors f définit bien une application, car si $y = u(x) + z = u(x') + z$, alors $x - x' \in \ker(u)$ donc $g(x - x') = 0$ par suite, on a $g(x) = g(x')$. **(0.25 pt)** De plus pour tout $x \in E$, on a $f(u(x)) = g(x)$, donc $g = f \circ u = {}^t u(f)$. **(0.25 pt)**

2. Soit $\dim E = n$, donc d'après le théorème du rang on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) & = & n - \dim(\ker(u)) \\ & = & \dim(\ker(u)^{\perp}) \qquad \textbf{(1 pt)} \\ & = & \dim(\mathrm{Im}({}^t u)) = \mathrm{rg}({}^t u) \end{array}$$

Exercice 2. (9 pts)

1. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2 pts)}$$

2. On a : $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 5 - \alpha$, **(1 pt)** donc pour $\alpha \neq 5$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ **(1 pt)** et pour $\alpha = 5$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$. **(1 pt)** Donc φ est non dégénérée, si et seulement si $\alpha \neq 5$. **(1 pt)**
3. $q(x) = \alpha x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$. **(1 pt)**
En appliquant l'algorithme de Gauss, on aura

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & \alpha x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ & = & -\left[x_3^2 - 2(2x_1 + 2x_2)x_3\right] + \alpha x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 \qquad \textbf{(2 pts)} \\ & = & -(2x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (\alpha + 4)x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 \\ & = & (\alpha - 5)x_1^2 + (3x_1 + x_2)^2 - (2x_1 + 2x_2 - x_3)^2 \end{array}$$