Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Solution Exercice 2

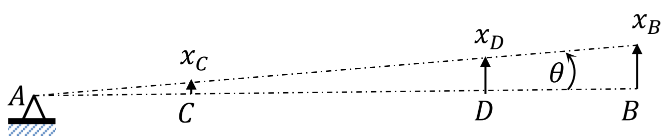
Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par A.

$$I_A = I_G + m\overline{AG}^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

Les déplacements x_C et x_D en fonction de l'angle de rotation θ.

$\theta\ est\ faible \Longrightarrow \sin\theta \cong \theta\ \ et\ \cos\theta \cong 1$

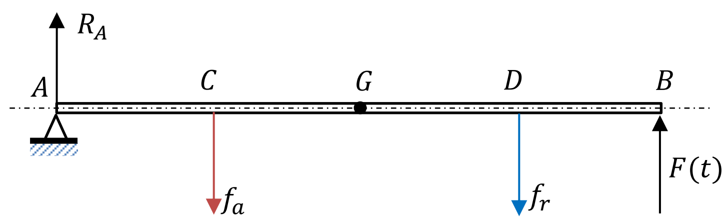


$x_C = \overline{AC}\ \sin\theta \cong \frac{1}{4}l\theta$

$x_D = \overline{AD}\ \sin\theta \cong \frac{3}{4}l\theta$

$x_B = \overline{AB}\ \sin\theta \cong l\theta$

Représentation des forces appliquées sur la tige (force d'amortissement, force de rappels,).



	Les forces appliquées	Les moments par rapport au centre de rotation A
La force de rappel	$f_r = kx_D = k\frac{3l}{4}\theta$	$\mathcal{M}_{f_r/A} = k\frac{3l}{4}\theta \times \frac{3l}{4} = \frac{9}{16}kl^2\theta$
La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_A = c\frac{l}{4}\dot{\theta}$	$\mathcal{M}_{f_a/A} = c\frac{l}{4}\dot{\theta} \times \frac{l}{4} = \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta}$
La réaction du support	R_A (Inconnue)	$\mathcal{M}_{R/A} = 0$
La force extérieure	$F(t) = F_0\cos\Omega t$	$\mathcal{M}_{F/A} = l \times F(t) = lF(t)$

Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique.

Somme des moments par rapport au point de rotation A est égale au moment d'inertie massique par rapport à A multiplier par l'accélération angulaire

L'équation de mouvement libre

$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/A} = I_A\ddot{\theta}$

$-\frac{9}{16}kl^2\theta - \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}.$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kl^2\theta = 0$$

Sous la forme $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{16}\frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{27}{16}\frac{k}{m}\theta = 0$$

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

La pulsation propre ω_n.

$$\omega_n = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le facteur d'amortissement Valeur de l'amortissement critique

$$\xi\omega_n = \frac{3}{32}\frac{c}{m} \Longrightarrow \xi\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{32}\frac{c}{m} \quad \Longrightarrow \xi = \frac{3\times 4}{32\times 3\sqrt{3}}\frac{c}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\xi = \frac{c}{8\sqrt{3km}}$$

Valeur de l'amortissement critique

$\xi = \dfrac{c}{c_c}$ pour $\xi = 1 \Longrightarrow c = c_c$

$$c_c = 8\sqrt{3km}$$

L'équation de mouvement forcé

$$+\circlearrowleft \mathcal{M}_{f_i/O} = I_A\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{16}cl^2\dot{\theta} + \frac{9}{16}kl^2\theta = lF_0\cos\Omega t \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{3}{16}\frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{27}{16}\frac{k}{m}\theta = \frac{3F_0}{ml}\cos\Omega t$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = \frac{3F_0}{ml}\cos\Omega t$$

Pour un amortissement sous critique

La solution homogène est donnée par $\theta_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\}$

La solution permanente est donnée par $\theta_p(t) = A_p\cos(\Omega t - \alpha)$

Avec $A_p = \frac{\Theta_0}{\sqrt{(1-r)^2+(2\xi r)^2}}$ et $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{(1-r)}\right)$

L'expression du déplacement angulaire

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\} + A_p\cos(\Omega t - \alpha)$$

L'expression de la vitesse angulaire

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{(A_2\omega_d - A_1\xi\omega_n)\cos\omega_d t + (-A_1\omega_d - A_2\xi\omega_n)\sin\omega_d t\} - \Omega A_p\sin(\Omega t - \alpha)$$

Conditions initiales

$$\theta(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{-\xi\omega_n 0}\{A_1\cos 0 + A_2\sin 0\} + A_p\cos(-\alpha) = 0$$

$$A_1 + A_p\cos(-\alpha) = 0 \Longrightarrow$$

$$A_1 = -A_p\cos\alpha$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^0\{(A_2\omega_d - A_1\xi\omega_n)\cos 0 + (-A_1\omega_d - A_2\xi\omega_n)\sin 0\} - \Omega A_p\sin(-\alpha) = 0$$

$$A_2 = \frac{A_1\xi\omega_n - \Omega A_p\sin\alpha}{\omega_d}$$

$$A_2 = -\frac{\xi\omega_n\cos\alpha + \Omega\sin\alpha}{\omega_d}A_p$$