Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

(Examen Final 2022-23)

Solution Exercice 3

a) **Déterminer les équations de mouvement avec la méthode de Lagrange.**

L'énergie cinétique totale (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\right)\dot{x}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2}$$

L'énergie potentielle totale (pour une rotation θ du disque le ressort k_1 s'allonge de $2r\theta = 2x_1$)

$$V = \frac{1}{2}k(2x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(4k){x_2}^2$$

$$\boxed{V = 2k{x_1}^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + 2k{x_2}^2}$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \qquad i = 1,2,\ldots$$

Sans amortissements et sans forces extérieures les équations de Lagrange se réduisent à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots$$

Première coordonnée généralisée $(q_1 = x_1)$**:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{3}{2}m\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 4kx_1 - k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0$$

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Deuxième coordonnée généralisée $(q_2 = x_2)$ **:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2} m\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{3}{2} m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = +k(x_2 - x_1) + 4kx_2$$

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_2 - kx_1 + 5kx_2 = 0$$

b) Ecrire l'équation caractéristique sous forme $(a^2 - b^2)$ **et déterminer les pulsations propres.**

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0$$

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_2 - kx_1 + 5kx_2 = 0$$

Dans un mode propre les réponses sont harmoniques

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= X_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -\omega^2 X_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega^2 X_2 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\omega^2 m X_1 e^{i\omega t} + 5kX_1 e^{i\omega t} - kX_2 e^{i\omega t} &= 0 \\ -\frac{3}{2}\omega^2 m X_2 e^{i\omega t} - kX_1 e^{i\omega t} + 5kX_2 e^{i\omega t} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \left(5k - \frac{3}{2}\omega^2 m\right) X_1 - kX_2 &= 0 \\ -kX_1 + \left(5k - \frac{3}{2}\omega^2 m\right) X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Après simplification de l'expression $e^{i\omega t}$ nous obtenons sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \left(5k - \frac{3}{2}\omega^2 m\right) & -k \\ -k & \left(5k - \frac{3}{2}\omega^2 m\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul.

$$\left(5k-\frac{3}{2}\omega^2 m\right)^2-k^2=0$$

L'équation caractéristique est bien sous la forme de $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$.

$$\left(5k-\frac{3}{2}\omega^2 m-k\right)\left(5k-\frac{3}{2}\omega^2 m+k\right)=0$$

$$\omega_1^2=\frac{8}{3}\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2=4\frac{k}{m}$$

c) Donner les expressions des réponses $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$.

Les fractions modales

$$\left(5k-\frac{3}{2}\omega_i^2 m\right)X_1-kX_2=0$$

$$-kX_1+\left(5k-\frac{3}{2}\omega^2 m\right)X_2=0$$

$$r_i=\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(i)}=\frac{\left(5k-\frac{3}{2}\omega_i^2 m\right)}{k}=\frac{k}{\left(5k-\frac{3}{2}\omega_i^2 m\right)}\qquad i=1,2$$

Pour le mode 1

$$r_1=\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(1)}=\frac{\left(5k-\frac{3}{2}\omega_1^2 m\right)}{k}=\frac{\left(5k-\frac{3}{2}\frac{8}{3}\frac{k}{m}m\right)}{k}=+1$$

Pour le mode 1

$$r_2=\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(2)}=\frac{\left(5k-\frac{3}{2}\omega_2^2 m\right)}{k}=\frac{\left(5k-\frac{3}{2}4\frac{k}{m}m\right)}{k}=-1$$

Les expressions des réponses

$$x_1(t)=A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t$$

$$x_2(t)=A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t-A_2\cos\omega_2 t-B_2\sin\omega_2 t$$