# Chapitre III : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

## 3.1. Introduction

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L'équation de continuité (conservation de la masse)
Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)
Le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement)

## 3.2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

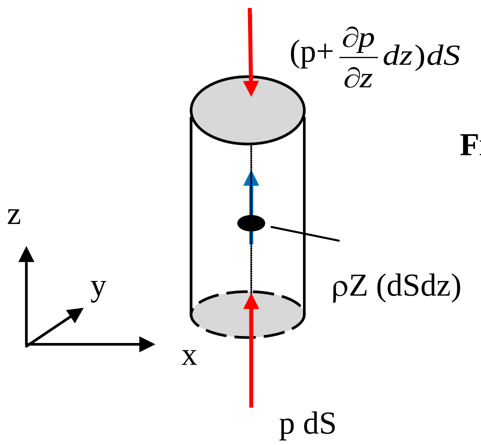



**Figure (1.1)** : Forces agissant sur un élément de volume (dSdz) dans la direction z

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dSdz) sont :

1. La force de volume : $\rho Z\,(dSdz)$
2. Les forces de pression : $pdS$ et $(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)dS$
3. La force d'inertie (accélération) : $\rho\frac{dw}{dt}(dSdz)$

où w est la composante de la vitesse $\vec{V}$ (u, v, w) selon la direction z
Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}$

La condition d'équilibre des forces selon la direction des z s'écrit :

$$P\,dS - (p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)dS + \rho Z\,(dSdz) = \rho\frac{dw}{dt}(dSdz)$$

ou par unité de volume : $-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = \rho\frac{dw}{dt}$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\begin{cases} \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho \dfrac{du}{dt} \\ \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho \dfrac{dv}{dt} \\ \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho \dfrac{dw}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{du}{dt} \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dv}{dt} \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{dw}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\underbrace{\rho\vec{F}}_{1} - \underbrace{\overrightarrow{grad}\, p}_{2} = \underbrace{\rho\frac{d\vec{V}}{dt}}_{3}} \qquad (3.1)$$

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d'inertie par volume unitaire

$\vec{F}$ est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z).
Les équations (3.1) sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l'accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations (3.1) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad (3.2)$$

### 3.3. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse $\vec{V}$ varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou instationnaire.

### 3.4. Equation de continuité

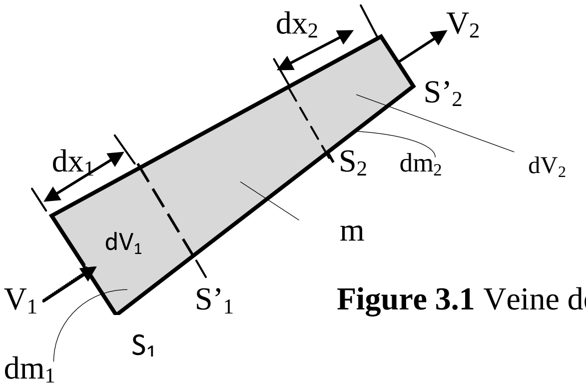



**Figure 3.1** Veine de fluide parfait incompressible

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique $\rho$ animé d'un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

$S_1$ et $S_2$ respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t
$S'_1$ et $S'_2$ respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' (t+dt)
$V_1$ et $V_2$ les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections $S_1$ et $S_2$ de la veine
$dx_1$ et $dx_2$ respectivement les déplacements des sections $S_1$ et $S_2$ pendant l'intervalle de temps dt
$dm_1$ : masse élémentaire entrante comprise entre les sections $S_1$ et $S'_1$
$dm_2$ : masse élémentaire sortante comprise entre les sections $S_2$ et $S'_2$
m : masse comprise entre $S_1$ et $S_2$
$dV_1$ : volume élémentaire entrant compris entre les sections $S_1$ et $S'_1$
$dV_2$ : volume élémentaire sortant compris entre les sections $S_2$ et $S'_2$
**A l'instant t** : le fluide compris entre $S_1$ et $S_2$ a une masse égale à $(dm_1+m)$
**A l'instant t'** : le fluide compris entre $S'_1$ et $S'_2$ a une masse égale à $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$ ; soit $dm_1 = dm_2$
Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2\, dV_2$ ou encore : $\rho_1\, S_1\, dx_1 = \rho_2\, S_2\, dx_2$
En divisant par dt, on obtient :

$$\rho_1 S_1 \overset{V_1}{\frac{dx_1}{dt}} = \rho_2 S_2 \overset{V_2}{\frac{dx_2}{dt}} \Longrightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; on obtient l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 V_1 = S_2 V_2} \tag{3.3}$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en ($m^3/s$). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

## 3.5. Notions de débit

### 3.5.1. Débit masse

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm /dt quand dt tend vers zéro

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt}}$$

$q_m$ : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s]
dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt
dt : intervalle de temps en (s)
En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \rho.S.\mathrm{V}$$

Ou encore :

$$q_m = \rho.S_1.\mathrm{V}_1 = \rho.S_2.\mathrm{V}_2 \qquad (3.4)$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'équation (3.4)

$$q_m = \rho.S.\mathrm{V} \qquad (3.5)$$

$q_m$ : débit massique (kg/s)
ρ : masse volumique (Kg/m$^3$)
S : section de la veine fluide (m$^2$)
V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

### 3.5.2. Débit en volume

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV /dt quand dt tend vers zéro

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}}$$

$q_v$ : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m$^3$/s)
dV : volume élémentaire en (m$^3$) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt
dt : intervalle de temps en secondes (s)

Relation entre le débit massique $q_m$ et le débit volumique $q_v$ :

$$\boxed{q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{\rho.S.V}{\rho} = S.V} \qquad (3.6)$$

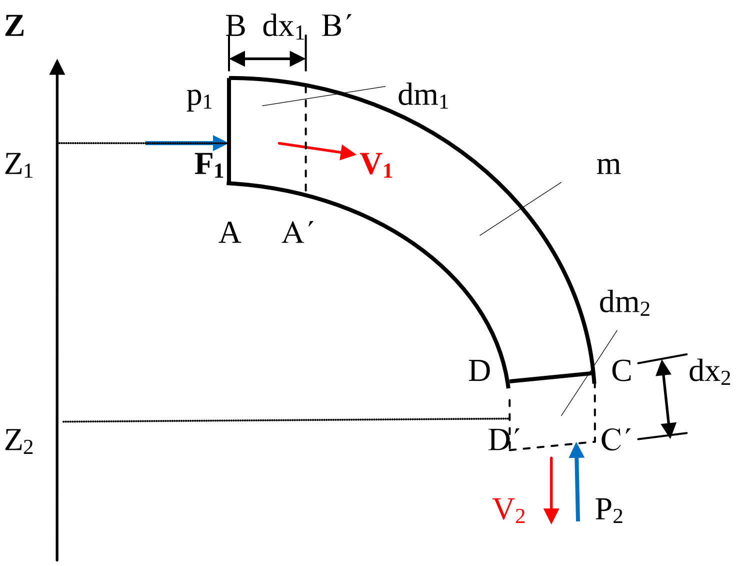
## 3.6. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(a) Cas sans échange d'énergie

Hypothèses :

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent
- L'écoulement est dans une conduite lisse

Application du théorème de l'énergie cinétique




La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant t : masse fluide ABCD et à l'instant t+dt : masse fluide A´B´C´D´

1. Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et t+dt. La variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c$ est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta E_c = \sum W \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \frac{1}{2} dm \,(V_2^2 - V_1^2) = dm .g\, (z_1 - z_2) + (p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2)$$

$$= dm .g\, (z_1 - z_2) + p_1 \underbrace{S_1 dx_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 dx_2}_{dV_2}$$

$$\frac{1}{2} dm \,(V_2^2 - V_1^2) = dm .g\, (z_1 - z_2) + (p_1 dV_1 - p_2 dV_2)$$

$$dm = \rho dV \longrightarrow dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\tfrac{1}{2}\, dm\,(V_2^2 - V_1^2) = dm\,.g\,(z_1 - z_2) + (p_1\, dm_1/\rho_1 - p_2\, dm_2/\rho_2)$$

$dm_1 = dm_2 = dm$

fluide incompressible: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\tfrac{1}{2}\, dm\,(V_2^2 - V_1^2) = dm\,.g\,(z_1 - z_2) + dm\,(p_1/\rho - p_2/\rho)$$

$$\tfrac{1}{2}\,(V_2^2 - V_1^2) = g\,(z_1 - z_2) + (p_1/\rho - p_2/\rho)$$

## 2. Formes de l'équation de Bernoulli

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\,Z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g\,Z_2 && \text{(J/kg)} \\ &p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g\,Z_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g\,Z_2 && \text{(Pa)} \\ &\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 && \text{(m)} \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

## 3. Interprétation de l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli (3.7) peut se mettre sous d'autres formes et unités comme le montre le tableau suivant. La plus utilisée est celle donnée en $(J/N)$

| Forme de l'équation de Bernoulli | Energie de position | Energie de pression | Energie cinétique | Unité |
|---|---|---|---|---|
| $H_T = p + \rho\frac{V^2}{2} + \rho g\, z$ | $\rho g z$ | $p$ | $\rho\frac{V^2}{2}$ | $(J/m^3)$, (Pa) |
| $H_T = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$ | $z$ | $\frac{p}{\rho g}$ | $\frac{V^2}{2g}$ | $(J/N)$, (m) |
| $H_T = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$ | $gz$ | $\frac{p}{\rho}$ | $\frac{V^2}{2}$ | $(J/kg)$ |

## 4. Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli

On définit la hauteur de charge totale d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle, de la pression et de l'énergie cinétique par unité de poids; soit

$$H_t = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \qquad (3.8)$$

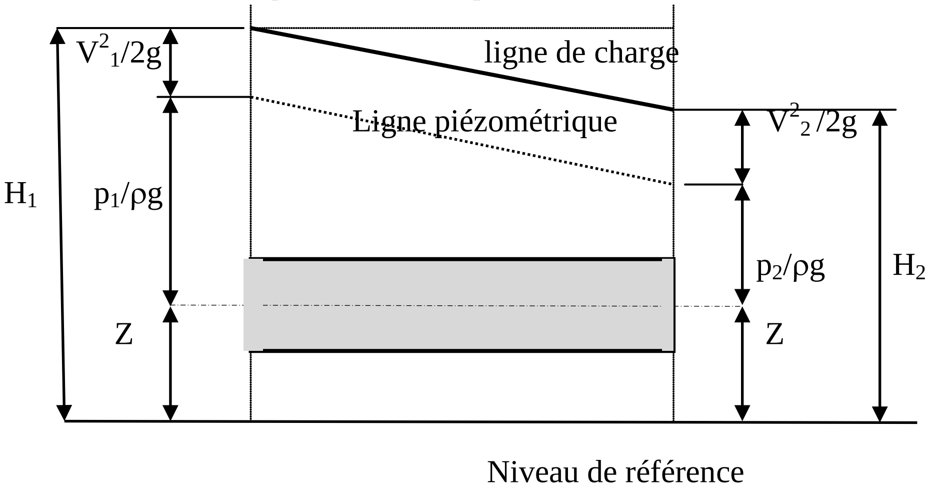
$H_t$ est la hauteur de charge totale en mètres de liquide

Z est la cote du point considéré par rapport à un niveau de référence en mètres

p est la pression au point considéré en pascals

ρ est la masse volumique du liquide en kilogramme par mètres cube g est l'accélération due à la gravité en mètres carré par seconde

V est la vitesse du liquide en mètres par seconde




On appelle <u>ligne de charge</u> le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H_t(x) = Z(x) + \frac{p(x)}{\rho g} + \frac{V^2(x)}{2g} \qquad (3.9)$$

Ou (x) indique que les quantités sont des fonctions de la distance mesurée le long de la direction générale de l'écoulement.

On définit la hauteur piézométrique d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle et de la pression par unité de poids :

$$H = Z + \frac{p}{\rho g} \qquad (3.10)$$

On appelle ligne piézométrique le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H(x) = Z(x) + \frac{p(x)}{\rho g} \qquad (3.11)$$

<u>Théorème de Bernoulli</u>

Comme pour la masse, la loi de conservation de l'énergie exprime le principe que l'énergie ne peut être ni créée ni anéantie. Elle ne peut être que transformée d »une forme à une autre.

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation d'énergie dans un écoulement permanent, unidirectionnel, incompressible d'un liquide idéal (sans dissipation d'énergie). Il s'écrit entre deux sections quelconques d'une ligne de courant sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 \qquad (3.12)$$

Ou explicitement : $Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$ (3.13)

**Hypothèse 1 : écoulement permanent.**

L'hypothèse de l'écoulement permanent signifie qu'aucune grandeur qui figure dans l'équation 6 ne dépend du temps. Si cette hypothèse n'était plus vérifiée, en totalité ou avec une bonne approximation, un terme additionnel traduisant cette non permanence devrait être pris en considération.

L'équation de Bernoulli s'écrirait dans ce cas :

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}dx \qquad (3.14)$$

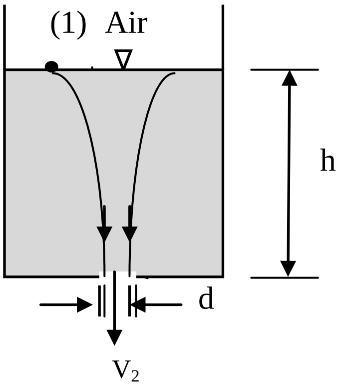
Le terme $\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}dx$

représente le travail par unité de poids des forces d'inertie entre les points 1 et 2 selon la direction x

## 3.7. Applications du théorème de Bernoulli

### *3.7.1. Formule de Torricelli*

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre.




(S >> s)

On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d'une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l'orifice).

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v^2{}_1}{2} + g\,Z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2{}_2}{2} + g\,Z_2$$

Hypothèses :

- $p_1 = p_2 = p_{atm}$
- $Z_2 = 0$ ; $Z_1 = h$ (plan de référence en 2)
- S >>s $\Longrightarrow$ $V_2 >> V_1$ donc $V_1 \approx 0$

formule de Torricelli

$$\boxed{V_2 = \sqrt{2gh}} \qquad (3.8)$$

$V_2$ est la vitesse théorique $V_{th}$, par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section $S_2$, est donné par : $Q_{th} = V_{th}.S_2$

$$Q_{th} = S_2.\sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $V_r = \varphi_1 . V_{th}$

$$\boxed{V_r = \varphi_1.\sqrt{2gh}} \qquad (3.9)$$

$$\varphi_1 = \frac{V_r}{V_{th}}$$

$\varphi_1$ : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_1 <1$), appelé coefficient de vitesse

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $S_r = \varphi_2 \, S_{th}$,

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{S_r}{S_{th}}} \qquad (3.10)$$

$\varphi_2$ : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_2 <1$), appelé coefficient de contraction de section.
Donc le débit réel à la sortie de l'orifice est donc :
$Q_r = S_r. V_r = \varphi_2. S_{th}. \varphi_1. \sqrt{2gh} = \alpha \, S_{th}. \sqrt{2gh} = \alpha \, .Q_{th}$

$$\boxed{\alpha = \frac{Q_r}{Q_{th}}} \qquad (3.11)$$

$\alpha$ :Coefficient plus petit que 1 ; $\alpha = \varphi_1. \varphi_2$, appelé coefficient de débit.

### *3.7.2. Calcul du temps de vidange*

A un instant t donné, on a :

$$Qv_r = -\frac{dV}{dt} = \alpha S_{th}\sqrt{2gz}$$

$$dt = -\frac{dV}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}} = -\frac{S(z)dz}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : S(z) = S

$$t = -\int \frac{dV}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}} = -\int_0^h \frac{Sdz}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}}$$

D'où le temps de vidange total

$$\boxed{t = \frac{2Sh}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}}} \qquad (3.12)$$

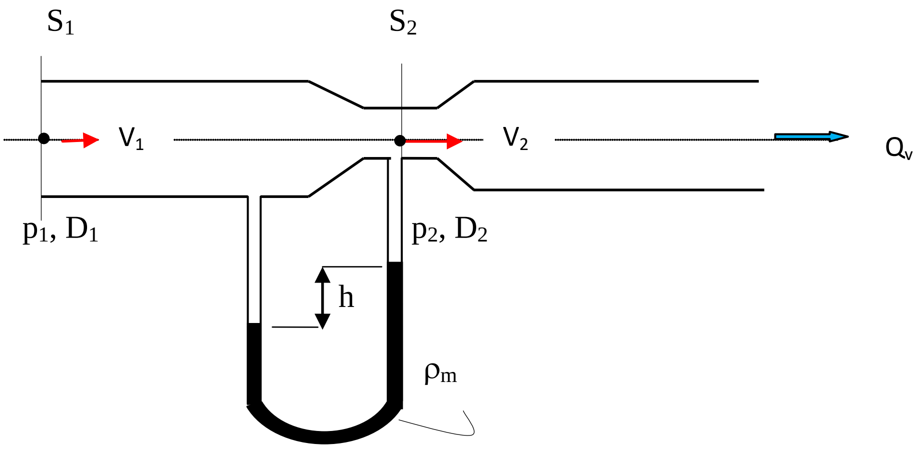
S.h : représente le volume initial ($V_0$) contenu dans le réservoir

$\alpha S_{th}\sqrt{2gz}$ : représente le débit en volume initial ($Qv_0$) au débit de l'expérience, on peut mettre t sous la forme :

$$\boxed{t = \frac{2V_0}{Qv_0}} \qquad 3.13)$$

### *3.7.3. Tube de Venturi*

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections $S_1$ et $S_2$ où les pressions sont respectivement $p_1$ et $p_2$. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue. $V_2 > V_1 \Longrightarrow p_2 < p_1$




On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \Longrightarrow V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2}$$

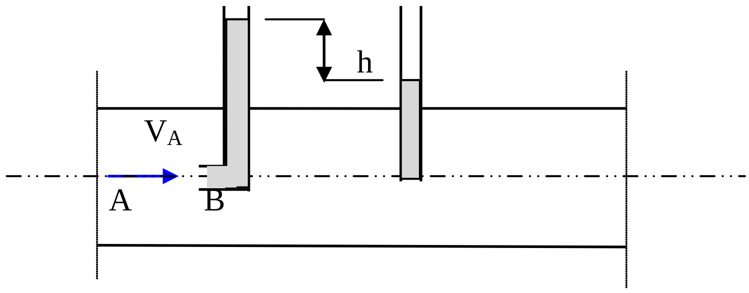
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] = \frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right]$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right]} \qquad (3.14)$$

$S_1$ et $S_2$ sont connues (caractéristiques du venturi), $p_1$ et $p_2$ sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse $V_1$.

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1]}}} \qquad (3.15)$$

*3.7.4. Tube de Pitot*




Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'ya plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.
En A, on a $p = p_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $V = V_A = V_\infty$, et $z = z_A$
En B, on a $p = p_B$, $V_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc : $p_A + ½\,\rho V^2_A + \rho g z_A = p_B + \overbrace{½\,\rho V^2_B}^{\approx 0} + \rho g z_B$

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)}} \qquad (3.16)$$

Comme la différence de pression $(p_B - p_A)$ peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse $V_\infty$

De l'hydrostatique, on a : $(p_B - p_A) = \rho\, gh$, ce qui donne :

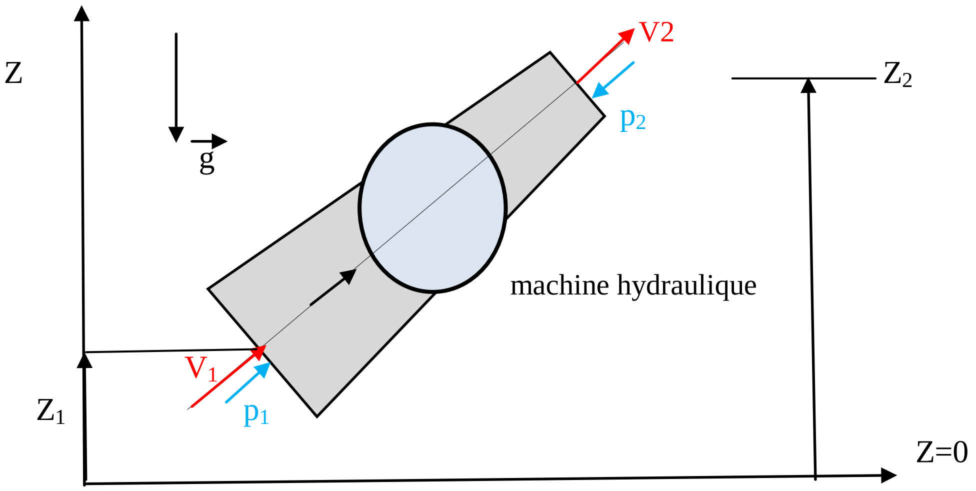
$$\boxed{V_2 = \sqrt{2gh}}$$

**Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)**

(b) Cas avec échange d'énergie

Il est assez fréquent, dans les installations industrielles, qu'un appareil hydromécanique, placé dans une veine fluide, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine).

Les deux types de machines qu'on peut rencontrer sont les pompes et les turbines. Les pompes sont des générateurs d'énergie mécanique, alors que les turbines sont des récepteurs d'énergie mécanique. Les pompes sont des générateurs d'énergie mécanique, alors que les turbines sont des récepteurs d'énergie mécanique
Appelons $W_i$ l'énergie massique transférée en (J/kg)
$W_{m1}$ : représente la densité énergétique à l'entrée de la veine
$W_{m2}$ : représente la densité énergétique à la sortie.




1) Apport d'énergie depuis le milieu extérieur (pompe)

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit : $W_{m2} = W_{m1} + W_i$ (3.16) $W_{m2} > W_{m1}$

2) Apport d'énergie au milieu extérieur (turbine)

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit : $W_{m1} = W_{m2} + W_i$ $W_{m1} > W_{m2}$

$$W_{m2} = W_{m1} - W_i \qquad (3.17)$$

Afin de regrouper les relations (3.16) et (3.17) en une seule nous adoptons la notation et la convention suivantes :
Soit $W_{12}$ l'énergie échangée par une masse de fluide de 1Kg avec le milieu extérieur entre les sections $S_1$ et $S_2$ de la veine fluide. $W_{12}$ est exprimée en J/kg.

$W_{12} > 0$ si le fluide reçoit de l'énergie (cas de pompe)
$W_{12} < 0$ si le fluide cède de l'énergie (cas de turbine)

Les relations (1) et (2) peuvent s'écrire : $W_{m2} - W_{m1} = W_{12}$

Cette convention et les expressions de $W_{m1}$ et $W_{m2}$ permettent de donner une expression unique du théorème de Bernoulli avec transfert d'énergie.

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = W_{12}} \qquad (3.19)$$

3) Puissance d'une machine hydraulique (puissance utile)

La puissance d'une machine hydraulique (motrice ou réceptrice) échangée avec un milieu s'exprime par :

$$\boxed{P_u = W_{12}\,\frac{dm}{dt} = W_{12}.Q_m} \qquad (3.20)$$

$Q_m$ : représente le débit massique de l'écoulement (kg/s)
$P_u$ : puissance s'exprime en (Watt)
$W_{12}$ : énergie échangée s'exprime en (J/kg)

4) Rendement d'une machine hydraulique

Pour une machine motrice (pompe) $P_a > P_u$ on pose alors : $P_u = \eta_p.P_a$

$$\boxed{P_a = \frac{P_u}{\eta_p}}$$ $\eta_p$ : rendement de la pompe (3.21)

Pour une machine réceptrice (turbine) $P_a < P_u$ on pose alors :

$$\boxed{P_u = \eta_T.P_a} \qquad (3.22)$$

$\eta_T$ : rendement de la turbine

### 3.8. Théorème des quantités de mouvement (théorème d'Euler)

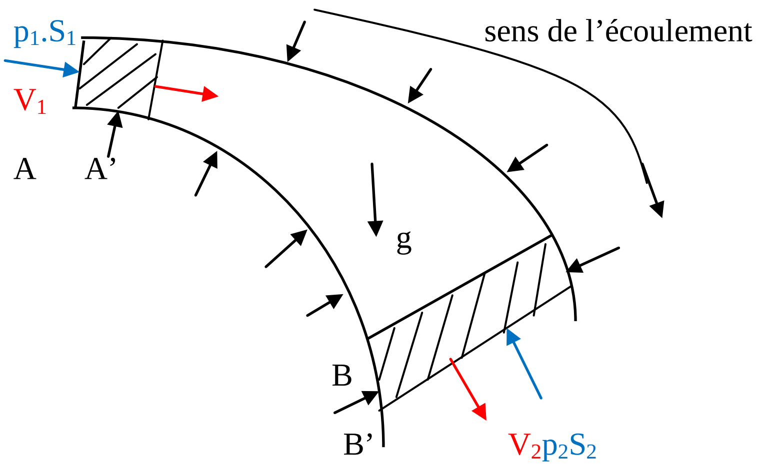
Ce théorème, également appelé théorème d'Euler, s'applique aussi bien aux fluides réels qu'aux fluides parfaits. Il a l'avantage de s'appliquer à des volumes fluides de dimensions finies sans qu'il soit nécessaire de connaitre les champs de vitesse et de contrainte à l'intérieur du domaine.

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieures appliquées à ce système matériel.

**On appelle impulsion ou quantité de mouvement d'une masse ponctuelle m, le produit mV de la masse par sa vitesse.**

$$m.\vec{V} = \begin{vmatrix} mu \\ mv \\ mw \end{vmatrix}$$

On applique alors ce principe à un tube de courant dans un écoulement permanent d'un fluide incompressible :




Soit un écoulement permanent de fluide incompressible. Considérons le système matériel formé par la partie du tube de courant entre les sections A et B au temps t. à l' instant t+dt, la même masse de fluide sera comprise entre les sections A´ et B´.

$$\boxed{m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}} \quad (3.23)$$

L'ensemble des forces extérieures obéit à l'équation du bilan de quantité de mouvement. Vectoriellement, on écrit :

$$\frac{d}{dt}\sum m\vec{V} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (3.24)$$

L'écoulement étant permanent, la masse fluide comprise entre les sections A´ et B est dans le même état à l'instant t+dt qu'à l'instant t. La variation de quantité de mouvement pendant le temps dt est donc due à l'apparition de la masse B B´ à la place de A A´. Si $q_m$ est le débit masse dans le tube de courant et $V_1$ et $V_2$ les vitesses en A et B, les masses de A A´ et B B´ étant égales à dm = $q_m$.dt. La variation de quantité de mouvement pendant le temps dt est donc égale à :

$$dm = \rho.dV = \rho.q_V.dt = q_m.dt$$

$$q_m\vec{V}_2 dt - q_m\vec{V}_1 dt \quad (3.25)$$

On en déduit :

$$d(\sum m\vec{V}) = q_m dt(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt}(\sum m\vec{V}) = q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt}(\sum m\vec{V}) = = \sum \vec{F}_{ext}$$

(3.28)

de (3.24) et (3.25), on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l} q_m(\vec{V_2}-\vec{V_1}) = \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_S \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_S = q_m(\vec{V_2}-\vec{V_1}) \quad (3.29)$$

Hypothèse d'un poids négligeable devant les autres forces, il vient :

$$\boxed{\vec{F}_p + \vec{F}_S = q_m(\vec{V_2}-\vec{V_1})} \quad (3.30)$$

$\vec{F}_g$ : désigne les forces de poids $\vec{P}$ pour un fluide pesant (force de volume)
$\vec{F}_p$ : désigne les forces de pression appliquées sur les sections d'entrée et de sortie
$\vec{F}_S$ : désigne les forces exercées par le fluide sur les parois solides de la conduite.

### 3.10. Théorème de Bernoulli en mouvement non permanent

Démonstration :

L'étude de l'équilibre d'un élément de tube de courant : $\overrightarrow{grad}\, p = \rho\ (\vec{F}-\vec{\gamma})$
Si le mouvement n'est pas permanent,
$\frac{\partial V}{\partial t}$ est différent de zéro. On a alors :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s}ds + \frac{\partial V}{\partial t}dt \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt} = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

L'équation d'équilibre longitudinal devient :

$$\rho g\frac{dz}{ds} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho(V\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t}) = 0 \qquad (1)$$

Introduisons les différentielles prises sur la trajectoire à un instant donné (dt=0), en remarquant que dt = 0, on a :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial s}ds \quad \text{et} \quad d\,(\frac{V^2}{2}) = V\frac{\partial V}{\partial s}ds$$

L'équation (1) devient :

$$dz + \frac{dp}{\varpi} + d(\frac{V^2}{2g}) + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}ds = 0$$

Et, en intégrant en s à l'instant considéré

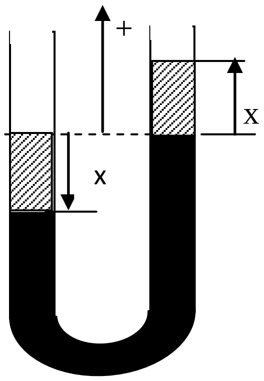
$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_0^s \frac{\partial V}{\partial t}ds = Cte$$

S'il s'agit d'un tube à section constante, ∂V/∂t est constant en tout point et on a :

$$\boxed{z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}s = Cte} \quad (3.31)$$

**3.11. Oscillation d'un liquide dans un tube en U**

Considérons un tube en U de section constante, contenant un liquide homogène. Ce tube est soumis à une perturbation extérieure, obtenue, par exemple, en inclinant le tube, le liquide se met à osciller. Calculons la période des oscillations.




soit x la distance de la surface libre à la position d'équilibre comptée positivement comme sur la figure

Appliquons le théorème de Bernoulli en mouvement varié entre A et B la surface de référence étant la position d'équilibre.

$$z_A + \frac{p_A}{\varpi} + \frac{V_A^{\ 2}}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\varpi} + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}L$$

(L : longueur totale du liquide dans le tube)

$p_A = p_B = p_{atm}$ $V_A = V_B$(section constante) $z_A = -x$, $z_B = x$

La vitesse est constante le long du tube, d'où :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt} = -\frac{2.x.g}{L}$$

Mais : V= $\frac{dx}{dt}$ $\qquad \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2.g.x}{L} = 0$ On retrouve l'équation différentielle classique d'un mouvement pendulaire

$$x = a.\sin\sqrt{\frac{2g}{L}}t$$

a : amplitude du mouvement x = 0 pour t = 0

La période est : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ c'est-à-dire la période d'un pendule ayant une longueur égale à $\frac{L}{2}$.

## 3.11. Exercices corrigés

**1.** Dans une conduite de 30 cm de diamètre circule de l'eau de masse volumique ρ=$10^3$ Kg/$m^3$ à une vitesse moyenne de 1m/s. Calculer le débit volumique et le débit massique

Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement si le débit est de 1800 litres/mn

Calculer la nouvelle valeur de la vitesse moyenne si le diamètre de la conduite est 15cm

Solution :

**1)** $Qv = S.V = \frac{\pi D^2}{4}.V = \frac{\pi}{4}(0.3)^2.1 = 0.0706 m^3/s$

$Qm = \rho.Qv = 10^3 * 0.0706 = 70.6 kg/s$

**2)** $Qv = S.V \Rightarrow V = \frac{Qv}{S} = \frac{4.Qv}{\pi D^2} = \frac{4*1.8}{60.\pi(0.3)^2} = 0.424 m/s$

**3)** $Qv = S.V \Rightarrow V = \frac{Qv}{S} = \frac{4.Qv}{\pi D^2} = \frac{4*1.8}{60.\pi(0.15)^2} = 1.698 m/s$

**2.** Soit un tube de venturi en position verticale ou circule de l'eau de masse volumique ρ=$10^3$ Kg/$m^3$

Ecrire l'équation de continuité et exprimer la relation entre les vitesses $V_1$ et $V_2$ et les diamètres $D_1$ et $D_2$. Calculer les vitesses $V_1$ et $V_2$, si Qv = 200 litres par seconde,

Calculer la différence de pression $\Delta p = (p_1 - p_2)$ si $D_1$=300mm et $D_2$= 150mm

Solution :

**1)** $Qv = S_1.V_1 = S_2.V_2 \Rightarrow (D_1)^2.V_1 = (D_2)^2.V^2$

$\frac{V_1}{V_2} = (\frac{D_1}{D_2})^2$

**2)** $V_1 = \frac{Qv}{S_1} = \frac{4.Qv}{\pi(D_1)^2} = \frac{4*0.2}{\pi(0.3)^2} = 2.83 m/s$

$V_2 = \frac{Qv}{S_2} = \frac{4.Qv}{\pi(D_2)^2} = \frac{4*0.2}{\pi(0.15)^2} = 11.32 m/s$

3)

$$p_1 + \frac{\rho}{2}(V_1)^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}(V_2)^2 + \rho g z_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left[(V_2)^2 - (V_1)^2\right] + \rho g(z_2 - z_1)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{10^3}{2}\left[(11.32)^2 - (2.83)^2\right] + 10^3.9.81.(0.5 - 1.25) = 56713.7 Pa$$